

**Modellmäßige Behandlung der
Alpha-Alpha-Streuung**

Hans Wittern

Modellmäßige Behandlung der Alpha-Alpha-Streuung

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Ludwig-Maximilians-Universität

zu München



vorgelegt

von

Hans Wittern

aus

Hamburg

Juli 1959

Berichterstatter Prof. Dr. F. Bopp

Tag der mündlichen Prüfung: **29. Juli 1959**

Zusammenfassung

Anhand allgemeiner Eigenschaften des aus 2 Alpha-
teilchen bestehenden 8-Teilchensystems stellen wir
ein semiphänomenologisches Potential für die α -
 α -Streuung auf und berechnen die Streuphasen für
dieses Potential. Bei geeigneter Wahl eines Poten-
tialparameters ist es möglich, die experimentellen
Streuphasen δ_L für $L \leq 4$ und $E_{cm} \leq 11,5$ MeV mit
diesem Potential zu beschreiben

Digitized by the Internet Archive
in 2026

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
I. Allgemeine Eigenschaften des $\alpha - \alpha -$ Streuproblems	8
II. Ansätze zur Behandlung des 8-Teilchen- Problems	16
III. Antisymmetrisierung und Relativbewegung	28
IV. Aufstellung des semiphänomenologischen Potentials	31
V. Durchführung und Ergebnisse der Rechnung	38
VI. Diskussion der Ergebnisse	48
<u>Anhang</u>	
I. Die Zerlegung des Antisymmetrisierungs- operators	53
II. Symmetrie des Integralkernes K	55
III. Bemerkungen zum Mehrteilchenproblem	58
IV. Kurzgefasste Behandlung des Schalenmodells	61
V. Schalenmodellfunktionen für den Kern Be 8	70
VI. Berechnung der Energiewerte im Rahmen des Schalenmodells	76
Literaturverzeichnis	79
Erläuterungen zu den Abbildungen 1 bis 26	82

Einleitung

Streuexperimente mit α -Teilchen an Heliumatomen, deren Kerne ebenfalls α -Teilchen sind, wurden bereits in den Jahren um 1930 ausgeführt (Ru 27, Ch 30, Wr 32, Mo 37, De 39). Damals galt es, die Frage zu beantworten, ob die α - α -Streuung durch die berühmte Rutherford'sche Streuformel oder durch die Mottformel beschrieben wird. In der von Mott (Mo 30) abgeleiteten Streuformel wird die Tatsache berücksichtigt, dass die α -Teilchen der Bose-Statistik folgen.

Die ersten deutlichen Abweichungen vom reinen Coulombschen Potential zwischen den α -Teilchen wurden 1931 beobachtet (Ta 32). Als Quellen für die α -Teilchen standen damals nur natürliche α -Strahler zur Verfügung. Infolgedessen waren die Streuexperimente noch sehr ungenau. Dennoch wurden schon damals Phasenanalysen durchgeführt (Ta 32) und phänomenologische Potentiale für die spezifisch nukleare α - α -Wechselwirkung diskutiert (Ta 32, Ma 41). Auch der Zusammenhang mit dem Compoundkern zweier α -Teilchen, dem Be 8, wurde untersucht, um Aussagen über dessen angeregte Niveaus zu gewinnen, die dann mit den Aussagen aus anderen Kernreaktionen verglichen wurden (Wh 41).

Im Laufe der Zeit, insbesondere seit der Inbetriebnahme der Teilchenbeschleuniger, sind zahlreiche und genauere Experimente durchgeführt

Anmerkung: Die Hinweise (Ru 27) etc. beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schlusse der Arbeit (Seite 79). (10) verweist auf Gleichung Nr. 10 desselben Abschnittes, während (I 10) in den späteren Abschnitten auf die Gleichung 10 des I. Abschnittes verweist etc.

worden. Man hat sich grosse Mühe gegeben, um neben den Winkelverteilungen auch die absoluten Werte der Streuquerschnitte zu bestimmen und eine genauere Phasenanalyse zu ermöglichen. Die neuesten Messungen wurden durchgeführt für folgende, im Schwerpunktsystem der beiden α -Teilchen gemessenen Energiebereiche der einfallenden α -Teilchen: 0 bis 1,5 MeV (He 56), 1,5 bis 3,0 MeV (Re 56), 6 MeV bis 11,5 MeV (Ni 56).

Heydenburg (He 56), Reich (Re 56) und Nilson (Ni 58) haben dazu die Phasenanalysen durchgeführt. Ausserdem liegen noch einzelne Messungen vor von Burcham (Bu 57) bei 19,25 MeV und Graves (Gr 51) bei 15 MeV. Bei diesen Energien sind entweder keine oder keine genauen Phasenverschiebungen bekannt.

Bemerkenswert ist noch, dass die neuen Streudaten von Nilson (Ni 56) erheblich von den früheren Messungen (St 53) abweichen.

Haefner hat 1951 einen zusammenfassenden Bericht über das α -Teilchenmodell gegeben (Ha 51). In dem α -Teilchenmodell, in dem α -Teilchen oder **mindestens** α -Cluster als Bestandteile der Atomkerne angesehen werden, spielt naturgemäss die Wechselwirkung zwischen zwei α -Teilchen eine fundamentale Rolle. Es findet sich in dieser Arbeit u. a. eine ausführliche Diskussion der α - α -Streuung, und zwar an Hand eines von Haefner eingeführten Modellpotentials, das im Folgenden noch näher betrachtet werden wird. Untersuchungen der α - α -Streupotentiale wurden ferner durchgeführt von Humphrey (Hu 57) und v. d. Spuy (Sp 58)

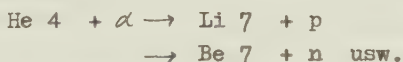
Eine Diskussion der neuen Streuexperimente auf Grund des Haefnerpotentials (Ni 58) lieferte qualitativ einigermaßen befriedigen-

de Resultate, während die quantitative Seite noch erheblich zu wünschen übrig liess.

Jost und Kohn (Jo 52) haben gezeigt, dass aus der Energieabhängigkeit der Streuphasen $\sigma_L(E)$ das zugehörige Wechselwirkungspotential konstruiert werden kann. Falls keine gebundenen Zustände existieren, ist das Potential für die verschiedenen Drehimpulse sogar eindeutig bestimmt. Einer praktischen Anwendung dieses Verfahrens steht allerdings der Umstand hindernd im Wege, dass die Streuphasen für alle Energiewerte zwischen Null und Unendlich bekannt sein müssen. Dazu reicht das experimentelle Material noch nicht aus. Abgesehen davon ist die Anwendbarkeit dieser Methode auf die α - α -Streuung dadurch in Frage gestellt, dass bei Energien von mehr als 20 MeV (im Schwerpunktsystem gemessen) neben der elastischen Streuung Kernreaktionen auftreten können, z. B.



oder, da der Isotopenspin (Ladungsspin) keine exakte Erhaltungsgrösse ist:



Andererseits: Sollen nur die Streuphasen eines gewissen Energie-Intervalls wiedergegeben werden, so gibt es dafür zahlreiche Potentiale. Man braucht nur $\sigma_L(E)$ ausserhalb des betrachteten Intervalls beliebig fortzusetzen und dann die Methode von Jost und Kohn anzuwenden. Unter den zahlreichen Potentialen, die sich so gewinnen lassen, wird es vielleicht auch solche geben, die nicht vom Drehimpuls abhängen, d. h. simultan die Streuphasen für $L = 0, 2, 4$ wiedergeben. Mit diesen Potentialen lässt sich dann die α - α -Streuung als Zweiteilchenproblem mit lokalem Potential behandeln.

Die Diskussion der angeregten Zustände des Kernes Be 8 im Zusammenhang mit der α - α -Streuung ba-

siert auf der Breit-Wigner-Formel und wurde ebenfalls von Nilson (Ni 58) durchgeführt.

Ein gutes phänomenologisches Potential für die α - α -Streuung bedeutet letztlich nichts anderes als eine kompakte Darstellung der experimentellen Daten. Es erhebt sich nun die Frage, ob man dieses Potential aus allgemeineren Prinzipien der Kernphysik ableiten kann. Als allgemeine Prinzipien kommen in Frage die Schrödingergleichung für das 8-Nukleonenproblem und die Kräfte zwischen den einzelnen Nukleonen, insbesondere die aus den Zwei-Nukleonenstreuexperimenten gewonnenen Zweikörperkräfte.

Ansätze zur Lösung dieses Problems liegen vor von Edwards (Ed 52), Biel (Bi 57), Herzenberg (He 57) und neuerdings von v. d. Spuy (Sp 59). Herzenberg und v. d. Spuy leiten Gleichungen ab, die es - wenigstens im Prinzip - gestatten, aus den Zweikörperkräften die Kräfte zwischen zwei oder mehr α -Teilchen zu berechnen. Einer praktischen Durchführung dieses Programms stehen neben mathematischen Schwierigkeiten die Mängel in der Kenntnis der Kernkräfte entgegen. Insbesondere entstehen dadurch Schwierigkeiten, dass das Problem der Absättigung der Kernkräfte noch nicht vollständig gelöst ist.

Wildermuth und Kanellopoulos (Wi 58, Wi 59) bearbeiten im Rahmen des Cluster-Modells des Atomkerns ebenfalls die Frage der Rückführung der Wechselwirkung zweier α -Teilchen auf die Zweikörperkräfte.

Wirkliche Berechnungen des effektiven Potentials zwischen zwei α -Teilchen liegen jedoch bisher nur für sehr niedrige Energien und unter Benutzung vereinfachender Annahmen vor.

Es erscheint daher zweckmässig, als Zwischenstufe zwischen die rein phänomenologischen α - α -Potentiale und ihre Berechnung aus den Zweikörperkräften ein semiphänomenologisches α - α -Potential einzuschalten, das bereits gewisse Züge des quantenmechanischen 8-Teilchenproblems berücksichtigt. Hinsichtlich dieser Frage möchte die vorliegende Arbeit einer vereinfachten Diskussion der α - α -Streuung im Rahmen des Mehrteilchenproblems dienen.

Wir wollen nun kurz angeben, was in den einzelnen Abschnitten behandelt wird, und zu welchen Resultaten wir gelangen.

Im ersten Abschnitt betrachten wir die α - α -Streuung ausgehend von einem ganzallgemeinen Standpunkt. Wir stellen die Schrödingergleichung auf und formulieren das asymptotische Verhalten ihrer Lösungen, ferner notieren wir die Formeln für die Winkelverteilung, d. h. den differentiellen Wirkungsquerschnitt der Streuung und erklären den Begriff der partiellen Streuphasen.

Im zweiten Abschnitt übertragen wir im Anschluss an die Arbeiten von Herzenberg (He 57) und v. d. Spivy (Sp 59) die adiabatische Methode, die bei der Behandlung atomarer Streuprozesse Anwendung findet, auf den Fall der α - α -Streuung. So einfach, wie sich die innere Bewegung der Elektronen im Atom behandeln lässt, ist es hier nicht mehr, da innerhalb des α -Teilchens nichts vorhanden ist, was in gleicher Weise ausgezeichnet ist wie der Atomkern im Atom. Bei der Antisymmetrisierung der Wellenfunktion treten nichtlokale Anteile für die effektive α - α -Wechselwirkung auf, die näherungsweise durch drehimpulsabhängige Potentiale beschrieben werden können. Eine Zerlegung der Wellenfunktion in zwei Faktoren, von denen der eine die Relativbewegung beschreibt, ist nur

möglich, solange die vollständige Antisymmetrisierung nicht notwendig ist. Und dieses ist der Fall, wenn die spezifisch nukleare Wechselwirkung zwischen den α -Teilchen vernachlässigt werden kann, also nur die Coulombwechselwirkung wesentlich ist.

Der Näherungsansatz für die Wellenfunktion besteht aus Summanden, in denen jeweils ein Faktor die Relativbewegung der α -Teilchen und ein zweiter ihre innere Bewegung beschreibt. Im dritten Abschnitt beweisen wir, dass auf Grund der Antisymmetrie der Gesamtwellenfunktion für die Relativbewegung nur solche Funktionen betrachtet werden müssen, die proportional der vierten Potenz des Relativabstandes sind.

Mit Hilfe der Schalenmodell-Wellenfunktionen für die angeregten Zustände des Compoundkernes Be 8 präzisieren wir diese Aussage noch ein wenig, und durch Einsetzen dieser Funktionen in eine Zweiteilchen-Schrödingergleichung erhalten wir ein drehimpulsabhängiges Wechselwirkungspotential. Für Abstände, die kleiner sind als eine Länge a , die dem Durchmesser des α -Teilchens entspricht, d. h. also für den Bereich, in dem praktisch ein Compoundkern vorliegt, legen wir das so gewonnene Potential und für grössere Abstände ein reines Coulombpotential der Streurechnung zugrunde.

Im nächsten Abschnitt behandeln wir Einzelheiten der Streurechnung und legen die Ergebnisse dieser Rechnungen vor. Die Länge a wird als Parameter variiert, und es zeigt sich, dass die experimentell gefundenen Werte der partiellen Streuphasen gut wiedergegeben werden, wenn man $a = 3,5 f$ ($1 \text{ Fermi } (f) = 10^{-13} \text{ cm}$) wählt. Das würde bedeuten, dass der Radius des α -Teilchens etwa $1,75 f$ beträgt.

Eine Diskussion der Ergebnisse erfolgt im letzten Abschnitt, während im Anhang einzelne Beweise nachgetragen werden, die im Hauptteil vom eigentlichen Gegenstand ablenken würden. U. a. wird in sehr gedrängter Form die von uns für die Gewinnung der Wellenfunktionen der virtuellen Zustände des Be-8-Kernes zugrundegelegte Version des Schalenmodells erläutert. Das ist notwendig, da es, je nach dem, um welche Gruppe von Kernen es sich handelt, verschiedene Versionen dieses Modelles gibt.

I. Allgemeine Eigenschaften des α - α -Streuproblems

Das α -Teilchen besteht aus 4 Nukleonen, je 2 Protonen und Neutronen. Die α - α -Streuung ist also ein 8-Teilchenproblem, dessen Schrödinger-gleichung durch

$$(1) \quad \mathcal{H}^{(p)} \psi(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_8) = E^{(p)} \psi \quad \text{mit}$$

$$\mathcal{H}^{(p)} = -\frac{\hbar^2}{2M} \sum_{i=1}^8 \Delta_i + V(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_8)$$

gegeben ist. (M = Masse des Nukleons). Wir verwenden den Isotopenspinformalismus und fassen in $\vec{r}_i$ die Orts- $\vec{r}_i$, Spin- S_i , und Ladungskordinaten t_i zusammen.

$$(2) \quad \vec{r}_i = \{ \vec{r}_i, S_i, t_i \}$$

Die Zustände des 8-Teilchenproblems werden beschrieben durch totalantisymmetrische Lösungen der Gleichung (1). Der Compoundkern zweier α -Teilchen, Be_8 , ist nicht stabil. Die Gleichung (1) hat somit keine Lösungen, die gebundenen Zuständen von 4 Protonen und 4 Neutronen entsprechen.

Unser Interesse gilt Zuständen, die der elastischen α - α -Streuung entsprechen. Das sind diejenigen Lösungen von (1), die asymptotisch die Form haben

$$(3) \quad \psi \cong \alpha \{ F_{2\mu}(\vec{R}_1 - \vec{R}_2) \varphi_2(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_4) \varphi_\mu(\vec{r}_5 \dots \vec{r}_8), \\ \text{für } |\vec{R}_1 - \vec{R}_2| \rightarrow \infty$$

Darin sind $\vec{R}_i$ Abkürzungen für

$$(4) \quad \vec{R}_1 = \frac{1}{4} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4) \\ \vec{R}_2 = \frac{1}{4} (\vec{r}_5 + \vec{r}_6 + \vec{r}_7 + \vec{r}_8) \quad \text{und}$$

$$(5) \quad \alpha = \sum_{\mu=1}^{8!} (\text{sgn } \rho_\mu) \rho_\mu$$

der Antisymmetrisierungsoperator für 8 Teilchen, in dem die P_μ alle Permutationen von 8 Dingen durchlaufen.

Die φ_2 beschreiben die Zustände des α -Teilchens, sind also totalantisymmetrische Lösungen der Gleichung

$$(6) \quad \mathcal{H}^{(4)} \varphi_2(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_4) = E_2^{(4)} \varphi_2 \quad \text{mit}$$

$$\mathcal{H}^{(4)} = - \frac{\hbar^2}{2M} \sum_{i=1}^4 \Delta_i + V(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_4)$$

Führen wir räumliche Polarkoordinaten ein

$$(7) \quad \mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2 = \mathcal{R} = \{R, \vartheta, \varphi\}$$

so können wir für die asymptotische Form von F auch schreiben

$$(8) \quad F_{\lambda\mu} \simeq e^{ik\mathcal{R}} + f(\vartheta) \frac{e^{ikR}}{R}$$

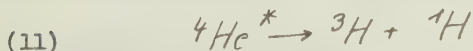
Wir wollen nun annehmen, dass die α -Teilchen vor der Streuung und, da wir nur elastische Streuprozesse betrachten, auch nach der Streuung im Grundzustand $\mu = \lambda = 0$ vorliegen. Die Energie der Relativbewegung ist dann durch

$$(9) \quad E = E^{(8)} - 2E_0^{(4)}$$

gegeben. Da es angeregte Zustände des α -Teilchens nicht gibt (Ei 56) und eine Spaltung des α -Teilchens erst bei

$$(10) \quad E = 19,81 \text{ MeV}$$

der Energieschwelle für den Prozess



einsetzt, darüberhinaus gebundene Zustände des

Compoundkerns Be 8 nicht existieren, können für $E_{c.m.} < 19,81 \text{ MeV}$ (im Schwerpunktsystem der beiden Streupartner) nur elastische Streuprozesse vorkommen.

Die Potentiale V in (1) und (6) sind translationsinvariant. Wir können also die Bewegung des Schwerpunktes in (1) und (6) separieren. Wir nehmen an, dass das bereits geschehen sei, ψ und φ also nur die innere Bewegung des 8- bzw. 4-Teilchensystems beschreiben.

Lassen wir im Operator der Kinetischen Energie den Anteil der Schwerpunktsbewegung

$$(12) \quad - \frac{\hbar^2}{2AM} \Delta_r \quad \text{Mit} \quad r = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A r_i$$

für $A = 4$ bzw. 8 weg, so erhalten wir:

$$(13) \quad T^{(4)} = - \frac{\hbar^2}{2M} \left(\sum_{i=1}^4 \Delta_i - \frac{\Delta_r}{4} \right) \quad \text{für } A = 4$$

$$T^{(8)} = - \frac{\hbar^2}{2M} \left(\sum_{i=1}^8 \Delta_i - \frac{\Delta_r}{8} \right) \quad " \quad A = 8$$

Führen wir noch die Koordinaten

$$(14) \quad \bar{\rho}_i = r_i - r \quad \text{und} \quad \bar{\rho}_i = \{ \bar{\rho}_i, s_i, t_i \}$$

ein, so können wir in ψ, φ und V $\bar{r}_i$ durch $\bar{\rho}_i$ ersetzen. Die Koordinaten $\bar{\rho}_i$ sind allerdings nicht mehr voneinander unabhängig.

Bei der Berechnung der asymptotischen Form von ψ müssen gemäss (3) der Reihe nach alle Permutationen der Permutationsgruppe $\mathcal{P}_8$ von 8 Dingen auf die Funktion

$$(15) \quad f = F(R_1, R_2) \cdot \varphi_0(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_4) \cdot \varphi_0(\bar{r}_5, \dots, \bar{r}_8)$$

angewandt werden. Diese Permutationen zerfallen in zwei Abteilungen. In die erste gehören diejenigen Permutationen, die entweder gar keine oder

alle Teilchen zwischen den beiden α -Teilchen in (15) austauschen, in die zweite gehören alle übrigen Permutationen der $\mathcal{P}_g$.

Die Permutationen der ersten Abteilung bilden eine Untergruppe U der $\mathcal{P}_g$, die wir im Folgenden noch mehrfach betrachten werden, und die zweite Abteilung enthält alle Nebenklassen zu dieser Untergruppe. Dass diese Einteilung nützlich ist, erkennen wir an folgender Überlegung:

Da der Grundzustand φ_0 des α -Teilchens ein gebundener Zustand ist, kann φ_0 nur in einem endlichen Bereich wesentlich von Null verschieden sein. Wir können daher eine Länge L_0 einführen, für die gilt

$$(16) \quad \varphi_0(\bar{\delta}_i) = 0 \quad \text{für } |\delta_i| > L_0$$

Das so definierte L_0 wird dieselbe Grössenordnung haben, zahlenmässig jedoch etwas grösser sein als der Radius des α -Teilchens. Wir betrachten nun den Ausdruck (15) für Abstände, die sehr gross sind gegen L_0

$$(17) \quad |R_1 - R_2| = R \gg L_0$$

und nehmen an, dass für eine bestimmte Wahl der $\bar{\delta}_i$ dieser Ausdruck von Null verschieden sei. Bei Anwendung sämtlicher Permutationen Q der zweiten Abteilung ergibt sich dann

$$(18) \quad Q f = 0 \quad \text{für } Q \in \mathcal{P}_g, Q \notin U$$

Zum Beispiel verschwindet

$$(19) \quad F\left(\frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_5}{4} - \frac{v_4 + v_6 + v_7 + v_8}{4}\right) \cdot \varphi_0(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_5) \cdot \varphi_0(\bar{v}_4, \bar{v}_6, \bar{v}_7, \bar{v}_8)$$

denn es ist

$$(20) \quad \varphi_0(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_5) = 0 \quad \text{wegen } \left| v_5 - \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_5}{4} \right| > L_0$$

Der Antisymmetrisierungsoperator für A Teilchen lässt sich nun zerlegen in zwei Faktoren, von denen der eine die Antisymmetrisierung bezüglich einer beliebigen Untergruppe der Permutationsgruppe $\mathcal{V}_8$ bewirkt. Einen Beweis dieser Behauptung geben wir im Anhang. Für eine Anwendung dieses Satzes legen wir die oben erwähnte Untergruppe U zugrunde und können dann schreiben

$$(21) \quad \mathcal{A} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{A}_U$$

Der Faktor $\mathcal{A}$ in (21) erzeugt eine Antisymmetrisierung bezüglich eines Repräsentantensystems der linksseitigen Nebenklassen von U, wie ebenfalls im Anhang gezeigt wird. Unter Berücksichtigung von (18) brauchen wir daher in der asymptotischen Form der Wellenfunktion nur die Antisymmetrisierung nach der Untergruppe U durchzuführen, und können für den zugehörigen Antisymmetrisierungsoperator noch einmal eine Faktorenzerlegung gemäss (21) vornehmen:

$$(22) \quad \mathcal{A}_U = (1 + P_{(15)}(26)(37)(48)) \cdot \mathcal{A}_{1234} \cdot \mathcal{A}_{5678}$$

Darin erzeugen $\mathcal{A}_{1234}$ und $\mathcal{A}_{5678}$ die Antisymmetrisierung in den Teilchen 1234 und 5678, also bezüglich der Untergruppe U_1 , deren Permutationen keine Teilchen zwischen den Alphas austauschen. Die Identität und die in Zykelschreibweise bei P als Index angegebene Permutation stellen ein Repräsentantensystem der Nebenklassen zu dieser Untergruppe dar.

Nun sind die Funktionen φ_0 bereits antisymmetrisch in den Teilchen 1...4 und 5...8. Wir erhalten also für die asymptotische Form der Wellenfunktion

$$(23) \quad \psi \cong \text{const} [F(\mathcal{R}) + F(-\mathcal{R})] \varphi_0(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_4) \varphi_0(\bar{v}_5 \dots \bar{v}_8)$$

Das Ergebnis können wir auch so formulieren:

Der ungerade Anteil der Wellenfunktion für die Relativbewegung verschwindet, so dass diese Funktion ohne Beschränkung der Allgemeinheit als gerade Funktion vorausgesetzt werden kann. Mit anderen Worten: Die Alphateilchen folgen der Bosestatistik.

Wegen (8) können wir für die asymptotische Form von ψ auch schreiben

$$(24) \quad \psi \approx \text{const} \left[e^{ikR} + e^{-ikR} + (f(\vartheta) + f(\pi-\vartheta)) \frac{e^{ikR}}{R} \right] \varphi_0(1234) \varphi_0(5678)$$

und erhalten unter Berücksichtigung dieser Symmetrieeigenschaft für den differentiellen Streuquerschnitt (Sch 49)

$$(25) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vartheta) + f(\pi-\vartheta)|^2$$

Für $R \gg L_0$ spielt die nukleare Wechselwirkung zwischen den Streupartnern keine Rolle mehr, und wir können uns, da die α -Teilchen kugelsymmetrisch sind, die Ladung im Schwerpunkt der Streupartner vereinigt denken. Für die Relativbewegung ergibt sich somit die Differentialgleichung

$$(26) \quad \left\{ T^{(p)} + V(\vec{b}_1 \dots \vec{b}_4) + V(\vec{b}_5 \dots \vec{b}_8) + \frac{4e^2}{R} \right\} \psi = E^{(p)} \psi$$

in der wir sofort die innere Bewegung der α -Teilchen abseparieren können,

$$(27) \quad \psi = F \varphi_0(1234) \cdot \varphi_0(5678)$$

wie wir es ja schon in dem asymptotischen Ausdruck für die Wellenfunktion (3) notiert haben. Die verbleibende Gleichung für F

$$(28) \quad \left\{ -\frac{\hbar^2}{4M} \Delta + \frac{4e^2}{R} \right\} F = EF$$

mit E aus (9) beschreibt die Bewegung zweier geladener Massenpunkte. Nach Einführung des Partialwellenansatzes

$$(29) \quad F = \frac{1}{R} \sum_L R_L(R) Y_L(\vartheta, \varphi)$$

ergibt sich eine Differentialgleichung für R_L . Ihre Lösungen sind in der Literatur als Coulombfunktionen bekannt, und man unterscheidet die reguläre Coulombfunktion F_L mit dem asymptotischen Verhalten für $(k.R) \rightarrow \infty$

$$(30) \quad F_L(k.R, \eta) \cong \sin \rho_L \quad \text{mit} \\ \rho_L = k.R - \frac{L\pi}{2} - \eta \ln k.R + \arg \Gamma(L+1+i\eta)$$

$$(31) \quad F_L(0, \eta) = 0$$

und die irreguläre Coulombfunktion, für die gilt

$$(32) \quad G_L(k.R, \eta) \cong \cos \rho_L$$

Diese hat für $R = 0$ einen Verzweigungspunkt.

Die Grössen k und η hängen von der Energie E ab

$$(33) \quad k = \frac{2}{\hbar} \sqrt{ME} \quad \eta = \frac{4e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{M}{E}}$$

und sind in Fig. 2 graphisch dargestellt (M = Masse des Nukleons).

Die asymptotische Form der Wellenfunktion R_L in (29) ist eine Linearkombination der Funktionen F_L und G_L

$$(34) \quad R_L = \cos \delta_L \cdot F_L + \sin \delta_L \cdot G_L$$

Die in (34) eingeführten Phasenwinkel δ_L bezeichnet man als partielle Streuphasen. Unter Berücksichtigung des asymptotischen Verhaltens der Coulombfunktionen lässt sich durch Vergleich von (29) mit (8) die Funktion $f(\vartheta)$ bestimmen, und nach Eintragen in (25) ergibt sich für den diffe-

rentiellen Wirkungsquerschnitt die Endformel:

$$(35) \quad \frac{d\sigma_{c.m.}}{d\Omega} = \frac{e^4}{E^2} \left| \frac{e^{-i\eta} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} + \frac{e^{-i\eta} \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}{\cos^2 \frac{\vartheta}{2}} \right. \\ \left. + \frac{2i}{\eta} \sum_{L=0, gerade}^{L_{max}} (2L+1) \cdot P_L(\cos \vartheta) e^{2iS_L} (e^{2iS_L} - 1) \right|^2$$

mit

$$S_L = \sum_{s=1}^L \arctg \frac{\eta}{s}$$

Die Bestimmung der Strauphasen aus den experimentellen Werten des differentiellen Wirkungsquerschnittes. $\frac{d\sigma_{exp}}{d\Omega}$ wird nun so vorgenommen, dass bei fester Energie durch geeignete Wahl der der Aus-
druck

$$(36) \quad I = \sum_i \epsilon_i \left\{ \frac{d\sigma_{exp}(\vartheta_i)}{d\Omega} - \frac{d\sigma_{c.m.}(\vartheta_i)}{d\Omega} \right\}^2$$

zum Minimum gemacht wird. Darin bedeuten ϵ_i Gewichtungsfaktoren und ϑ_i durchläuft die verschiedenen Winkel, für die Messungen durchgeführt wurden. Der Zahlenwert von I gibt ein Mass für die Güte der Wiedergabe der experimentellen Streudaten durch die δ_L .

Für den Energiebereich $6 \text{ MeV} \leq E_{cm} \leq 11,5 \text{ MeV}$ haben Nilson und Mitarb. (Ni 58) die entsprechenden Rechnungen auf der Rechenanlage in Illinois durchgeführt. Ihre Ergebnisse sind in Fig. 21 bis 23 für die Drehimpulse $L = 0, 2, 4$ wiedergegeben. Höhere Drehimpulse spielen erst bei höheren Energien eine Rolle.

II. Ansätze zur Behandlung des α -Teilchenproblems

In diesem Abschnitt wollen wir die Fragen behandeln, die bei der Berechnung der α - α -Potentiale aus den Zweikörperkräften auftreten. Es kann nicht unsere Aufgabe sein, der Reihe nach alle in der Literatur behandelten Ansätze dafür zu besprechen. Wir wollen vielmehr zeigen, in welchem Stadium sich diese Untersuchungen heute befinden und welche Schwierigkeiten dabei auftreten. Wir folgen daher weitgehend den beiden neuesten Arbeiten auf diesem Gebiet, nämlich denen von Herzenberg (He 57) und v. d. Spuy (Sp 59).

Das α - α -Streuproblem hat eine gewisse Ähnlichkeit mit atomaren Streuprozessen, die darin begründet ist, dass in beiden Fällen die Streupartner neben der Relativbewegung auch eine innere Bewegung ausführen, die quantenmechanisch beschrieben werden muss.

Trotz dieser Analogie sind aber auch Unterschiede zwischen den beiden Streuproblemen vorhanden, die eine genaue Übertragung der Rechenmethoden für die atomaren Streuprozesse auf die α - α -Streuung unmöglich machen, und die dafür verantwortlich sind, dass Erscheinungen auftreten, die bei atomaren Streuprozessen keine Rolle spielen.

Der wichtigste Unterschied besteht neben der unterschiedlichen Grösse und den unterschiedlichen Massenverhältnissen in Folgendem. Innerhalb der α -Teilchen ist nichts vorhanden, was in gleicher Weise ausgezeichnet ist wie der Atomkern im Atom.

Solange die beiden α -Teilchen getrennt sind, kann der Schwerpunkt der α -Teilchen die Rolle des Atomkerns im Atom übernehmen. Aber auch dann besteht noch ein Unterschied. Während die Antisymmetri-

sierung der Elektronen ohne weiteres in den Koordinaten der inneren Bewegung durchgeführt werden kann, ist dies für die Nukleonen des α -Teilchens nicht mehr der Fall, da die Teilchenkoordinaten nicht mehr voneinander unabhängig sind.

Sobald jedoch die beiden α -Teilchen ein Compound-system bilden, lässt sich nichts mehr angeben, was die Rolle der Atomkerne übernehmen kann. Infolge der Gleichheit der Teilchen hat der Begriff eines Schwerpunktes von 4 Teilchen überhaupt keinen Sinn mehr.

Wenn wir dagegen zunächst die Gleichheit der Teilchen ungerücksichtigt lassen, können wir nach Einführung der Schwerpunkte der Teilchen 1...4 und 5...8 eine formale Näherungslösung nach der adiabatischen Methode gewinnen.

Wir beginnen mit der folgenden Koordinaten-Transformation

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \mathcal{R} &= \frac{1}{2} (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2) & \mathcal{R} &= (\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2) \\
 (2) \quad \mathcal{R}_1 &= \frac{1}{4} (\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_3 + \mathcal{V}_5 + \mathcal{V}_4) & \mathcal{R}_2 &= \frac{1}{4} (\mathcal{V}_5 + \mathcal{V}_6 + \mathcal{V}_7 + \mathcal{V}_8) \\
 \mathcal{P}_1 &= \mathcal{V}_1 - \frac{1}{3} (\mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3 + \mathcal{V}_4) & \mathcal{P}_4 &= \mathcal{V}_5 - \frac{1}{3} (\mathcal{V}_6 + \mathcal{V}_7 + \mathcal{V}_8) \\
 \mathcal{P}_2 &= \mathcal{V}_2 - \frac{1}{2} (\mathcal{V}_3 + \mathcal{V}_4) & \mathcal{P}_5 &= \mathcal{V}_6 - \frac{1}{2} (\mathcal{V}_7 + \mathcal{V}_8) \\
 \mathcal{P}_3 &= \mathcal{V}_3 - \mathcal{V}_4 & \mathcal{P}_6 &= \mathcal{V}_7 - \mathcal{V}_8
 \end{aligned}$$

Ihre Umkehrung lautet:

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \mathcal{R}_1 &= \mathcal{R} + \frac{1}{2} \mathcal{R} & \mathcal{R}_2 &= \mathcal{R} - \frac{1}{2} \mathcal{R} \\
 (4) \quad \mathcal{V}_1 &= \mathcal{R}_1 + \frac{3}{4} \mathcal{P}_1 & \mathcal{V}_5 &= \mathcal{R}_2 + \frac{3}{4} \mathcal{P}_4 \\
 \mathcal{V}_2 &= \mathcal{R}_1 - \frac{1}{4} \mathcal{P}_1 + \frac{2}{3} \mathcal{P}_2 & \mathcal{V}_6 &= \mathcal{R}_2 - \frac{1}{4} \mathcal{P}_4 + \frac{2}{3} \mathcal{P}_5 \\
 \mathcal{V}_3 &= \mathcal{R}_1 - \frac{1}{4} \mathcal{P}_1 - \frac{1}{3} \mathcal{P}_2 + \frac{1}{2} \mathcal{P}_3 & \mathcal{V}_7 &= \mathcal{R}_2 - \frac{1}{4} \mathcal{P}_4 - \frac{1}{3} \mathcal{P}_5 + \frac{1}{2} \mathcal{P}_6 \\
 \mathcal{V}_4 &= \mathcal{R}_1 - \frac{1}{4} \mathcal{P}_1 - \frac{1}{3} \mathcal{P}_2 - \frac{1}{2} \mathcal{P}_3 & \mathcal{V}_8 &= \mathcal{R}_2 - \frac{1}{4} \mathcal{P}_4 - \frac{1}{3} \mathcal{P}_5 - \frac{1}{2} \mathcal{P}_6
 \end{aligned}$$

Für den Hamiltonoperator H in (I 1) erhalten wir nach Weglassen der kinetischen Energie der Schwerpunktsbewegung:

$$(5) \quad \mathcal{H} = T^{(P)} + V(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_8) \\ = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{\mathcal{R}} + T_1^{(4)} + T_2^{(4)} + V(\mathcal{R}, \beta_1 \dots \beta_6, s_1 \dots t_8)$$

$$\text{mit} \quad T_1^{(4)} = -\frac{\hbar^2}{M} \left(\frac{2}{3} \Delta_{\beta_1} + \frac{3}{4} \Delta_{\beta_2} + \Delta_{\beta_3} \right)$$

$$T_2^{(4)} = -\frac{\hbar^2}{M} \left(\frac{2}{3} \Delta_{\beta_4} + \frac{3}{4} \Delta_{\beta_5} + \Delta_{\beta_6} \right)$$

$T_1^{(4)}$ und $T_2^{(4)}$ beschreiben die kinetische Energie der inneren Bewegung der beiden α -Teilchen (vgl. I 13).

Die adiabatische Methode besteht nun darin, dass zunächst die Gleichung für die "innere Bewegung"

$$(6) \quad \left\{ T_1^{(4)} + T_2^{(4)} + V(\mathcal{R}, \beta_1 \dots t_8) \right\} \chi_{\lambda} = U_{\lambda}(\mathcal{R}) \chi_{\lambda}(\beta_1 \dots t_8, \mathcal{R})$$

gelöst wird, in der $\mathcal{R}$ als Parameter auftritt. Dem entsprechend ist der Energie-Eigenwert U_{λ} eine Funktion von $\mathcal{R}$.

Die Funktionen χ_{λ} setzen wir im Folgenden als reell und auf 1 normiert voraus

$$(7) \quad \int \chi_{\lambda}^2 d\tau_{\text{int}} = 1$$

darin bedeutet $d\tau_{\text{int}}$ eine Integration über die inneren Koordinaten $\beta_1 \dots \beta_6$ und eine Summation über die Spin- und Ladungskordinaten $s_1 \dots t_8$.

Mit $U_{\lambda}(\mathcal{R})$ als Potential wird nun die Gleichung

$$(8) \quad \left\{ -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{\mathcal{R}} + U_{\lambda}(\mathcal{R}) \right\} F_{\lambda}(\mathcal{R}) = E F_{\lambda}(\mathcal{R})$$

gelöst. Es ist klar, dass die Produktfunktion

$$(9) \quad \psi = F_{\lambda}(\mathcal{R}) \cdot \chi_{\lambda}(\mathcal{R}, \beta_1 \dots t_8)$$

im allgemeinen die Gleichung (I 1) nicht löst; jedoch liegt eine gute Näherung vor, wenn χ_2 nur wenig von $\mathcal{R}$ abhängt. Die Gültigkeit der Näherung (9) ist durch die Bedingung

$$(10) \quad \frac{\hbar^2}{4M} \left| \int F_{\mu}^* \varphi_{\mu} \Delta_{\mathcal{R}} F_2 \varphi_2 d\tau_{int} \right| \ll |U_2 - U_2'|$$

$\lambda'_2 \neq \lambda_2$

beschränkt. Man drückt die Gültigkeitsbedingung gelegentlich auch so aus: Die Geschwindigkeit der inneren Bewegung muss gross sein gegenüber der Geschwindigkeit der Relativbewegung. Herzenberg hat hierfür eine grobe Abschätzung gegeben, die besagt, dass für die α - α -Streuung die adiabatische Methode bis zu Energien von

$$(11) \quad E_{c.m.} \approx 4 \text{ MeV}$$

(im Schwerpunktsystem) anwendbar sei. Diese Abschätzung ist jedoch zahlreichen Einwänden ausgesetzt.

Berücksichtigen wir nun die Gleichheit der Teilchen, so erkennen wir, dass (9) sicher keine gute Näherung für das α - α -Streuproblem darstellt, wenn ein Nukleonenaustausch zwischen den α -Teilchen wichtig ist. Wir müssen dann totalantisymmetrische Wellenfunktionen betrachten.

Die Näherungslösung (9) lässt sich auf zwei Arten verallgemeinern. Wir besprechen zunächst die erste.

Die Gleichung (I 1) ist symmetrisch in den 8 Teilchen. Ihre Lösungen haben also definierten Symmetriecharakter. Andererseits bilden die Lösungen der Gleichung (6) ein vollständiges System bezüglich der inneren Koordinaten und gestatten eine Entwicklung der strengen Lösungen:

$$(12) \quad \psi = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda}(\mathcal{R}) \chi_{\lambda}(\mathcal{R}, \beta, \dots, t_{\beta})$$

unter denen sich auch die gewünschten total antisymmetrischen befinden.

Diese naheliegende Verallgemeinerung des Ansatzes (9) stellt auch bei Abbrechen der Reihe ein systematisches Näherungsverfahren dar. Es hat aber folgende Nachteile:

Es lässt sich an der unendlichen Reihe der Symmetriecharakter der Funktion nicht leicht erkennen. Eine Entscheidung, ob wir eine zulässige Funktion vor uns haben oder nicht, fällt also schwer.

Bei Beschränkung auf endlich viele Glieder geht im allgemeinen die Antisymmetrie verloren. Der Nukleonen-Austausch wird dann nicht richtig beschrieben.

Die zweite Verallgemeinerung der Näherungslösung besteht in der Antisymmetrisierung von (9):

$$(13) \quad \psi = a \left\{ F_2(x) \cdot \chi_2(x, p, \dots, t) \right\}$$

mit a aus (I 5). Hier erkennt man sofort den Symmetriecharakter. Dagegen lässt sich schwer abschätzen, unter welchen Bedingungen (13) eine gute Näherung für die Lösungen der Gleichung (I 1) darstellt..

Den weiteren Betrachtungen legen wir den Ansatz (13) zugrunde. Möglicherweise erhalten wir eine Verbesserung, wenn wir die in (13) vorkommenden Funktionen F und χ nicht aus den Gleichungen (8) und (10) gewinnen, sondern so bestimmen, dass der Ausdruck

$$(14) \quad \int \psi^* (H - E') \psi \, d\tau$$

gegenüber Variationen von F und χ stationär ist. (Rayleigh-Schrödingersches Variationsprinzip). An der Bedingung (7) wollen wir jedoch nach wie vor festhalten.

Wir wollen nun plausible Ansätze für χ besprechen. und betrachten zunächst die Gleichung (I 6), deren totalantisymmetrische Lösungen die Zustände des α -Teilchens beschreiben. Nach Abtrennung der Schwerpunktsbewegung können wir diese auch so schreiben

$$(15) \quad (T^{(4)} + V(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_4)) \varphi_2 = E_2^{(4)} \varphi_2$$

Wir nehmen an, - und diese Annahme findet ihre Stütze in den bisher diskutierten Formen der Zweikörperkräfte - dass die Kernkräfte nur schwach von den Spin- und Ladungskoodinaten abhängen. Um zu einer Näherungswellenfunktion für das α -Teilchen zu gelangen, vernachlässigen wir diese Abhängigkeiten zunächst ganz. Dann lässt sich der Spin- und Ladungsspinanteil der Wellenfunktion abseparieren, und der Symmetriecharakter des Orts- und der des Spin- und Ladungsspinanteils sind einzeln Erhaltungsgrößen.

Der attraktive Charakter der Kernkräfte kommt dann darin zum Ausdruck, dass im Grundzustand der Ortsanteil der Wellenfunktion symmetrisch in den 4 Koordinaten r_i ist. Dementsprechend ist der Spin- und Ladungsspinanteil antisymmetrisch in den 4 Teilchen. Wir können somit schreiben:

$$(16) \quad \varphi_2 = u_2(r_1 \dots r_4) \cdot g(1234)$$

Darin ist u_2 der Ortsanteil der Wellenfunktion, und $g(1234)$ die Determinante aus den 4 Spin- und Ladungsspinfunktionen zu den Quantenzahlen:

$$(17) \quad \begin{array}{llllll} \alpha_1(1) & \text{beschreibt den Zustand:} & s_z(1) = +\frac{1}{2}, & t_3(1) = +\frac{1}{2} & & \\ \alpha_2(1) & " & " & " & = -\frac{1}{2} & = +\frac{1}{2} \\ \alpha_3(1) & " & " & " & = +\frac{1}{2} & = -\frac{1}{2} \\ \alpha_4(1) & " & " & " & = +\frac{1}{2} & = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Berücksichtigen wir in den Kernkräften die Abhängig-

keiten von den Spin- und Ladungsspinkoordinaten, so ist der Ansatz (16) nur eine Näherung. Tragen wir (16) in (15) ein, multiplizieren mit der zu $g(1234)$ konjugierten Funktion und summieren über die Spin- und Ladungskoodinaten, so erhalten wir eine Gleichung für den Ortsanteil der Wellenfunktion. Dieses Verfahren können wir als adiabatische Behandlung der Spin- und Ladungsspinabhängigkeit bezeichnen.

Lösungen für das 8-Teilchenproblem erhält man in entsprechender Weise mit dem Ansatz

$$(18) \quad \chi_2 = u_2 (v_1 \dots v_4, v_5 \dots v_8) g(1234) g(5678)$$

Da es nur 4 linear unabhängige Spin- und Ladungsspinfunktionen gibt, kann die Ortsabhängigkeit der Wellenfunktionen nur in je 4 Teilchen simultan symmetrisch sein.

Wir setzen jetzt voraus, dass die Funktion χ bekannt sei, gleichgültig, ob es sich dabei um die optimale Form oder nur einen willkürlichen Ansatz handelt. Dann liefert die Variation von F in (14) eine Integro-Differentialgleichung zur Bestimmung von F

$$(19) \quad \int \chi (\mathcal{H} - E') \mathcal{A} F \chi \, d\tau_{int} = 0$$

Um die Struktur dieser Gleichung deutlicher zu sehen führen wir die Faktorenerlegung des Antisymmetrisierungsoperators $\mathcal{A}$ ein (I 21)

$$(20) \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2$$

Unter Berücksichtigung der Symmetrie von $F \cdot \chi$ können wir schreiben

$$(21) \quad \int \chi (\mathcal{H} - E') \mathcal{A}_1 (F \chi) \, d\tau_{int} = 0$$

Wir führen die Abkürzungen ein

$$(22) \quad V_x \cdot F = \int \chi (\mathcal{H} - E') (\mathcal{N} - 1) \cdot F \chi \, d\tau_{int}$$

$$(23) \quad H_D \cdot F = \int \chi (\mathcal{H} - E') F \chi \, d\tau_{int}$$

H_D können wir in folgende Summanden zerlegen:

$$(24) \quad H_D \cdot F = - \frac{\hbar^2}{4M} \Delta_{\mathcal{R}} F - E F + \mathcal{L} \cdot F + V_D F + V_C F$$

Darin wurde Gebrauch gemacht von den Abkürzungen

$$(25) \quad \mathcal{L} \cdot F = - \frac{\hbar^2}{2M} \int \chi \{ 2(\nabla_{\mathcal{R}} F) \nabla_{\mathcal{R}} + \Delta_{\mathcal{R}} \} \chi \, d\tau_{int}$$

$$(26) \quad V_D = \int \chi \{ T_1^{(4)} + T_2^{(4)} - 2E_0^{(4)} + V(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N) \} \chi \, d\tau_{int} - V_C$$

$$(27) \quad E = (E' - 2E_0^{(4)})$$

$$(28) \quad V_C = \frac{e^2}{8} \sum_{i,k \neq i}^p \int \frac{(1 + \tau_3^{(i)})(1 + \tau_3^{(k)})}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} \chi^2 \, d\tau_{int}$$

Die Definition von V_D wurde so gewählt (26), dass für $\mathcal{R}$ gegen Unendlich V_D gegen Null strebt, wie es unter Berücksichtigung von (I 6 und (I 15) tatsächlich der Fall ist.

V_D bezeichnet man als direkte Wechselwirkung, während in V_x sämtliche Austauschglieder enthalten sind. in V_x tritt die Energie E' explizit auf, da die durch Antisymmetrisierung auseinander hervorgehenden Glieder im allgemeinen nicht aufeinander orthogonal sind.

Da in (22) der Permutationsoperator $\mathcal{N}$ vorkommt, ist zu erwarten, dass die Austauschwechselwirkung V_x nichtlokalen Charakter hat. Es liegt daher nahe, für V_x die Form

$$(29) \quad V_x \cdot F = \int K(\mathcal{R}, \xi) \cdot F(\xi) \cdot d\tau_{\xi}$$

anzunehmen. Da χ reell ist, muss auch K reell sein. K muss ferner hermitesch sein. Beides zusammen ergibt:

Einen Beweis für die Gleichungen (29) und (30) sowie die genaue Definition des Integralkernes K tragen wir im Anhang nach.

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (22) bis (29) erhalten wir schliesslich die Differentialgleichung für F

$$(31) \quad -\frac{\hbar^2}{4M} \Delta_{\mathcal{R}} F + \mathcal{L}_1 F + V_D F + V_c F + \int K_1 F d\tau_{\xi} = E \cdot F$$

Die weitere Behandlung erfolgt bei Herzenberg unter den Annahmen

$$(32) \quad V_x = \begin{cases} \infty & \text{für } |x| < R_0 \\ 0 & \text{für } |x| > R_0 \end{cases}$$

$$(33) \quad V(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_p) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^p V(\bar{v}_i, \bar{u}_k)$$

und legt den Rechnungen den Ansatz

$$(34) \quad V(\bar{v}_i, \bar{u}_k) = e^{-\beta(v_i - v_k)^2} (W + M P_{\pi} + B P_{\sigma} + H P_{\tau})$$

bezw. ein entsprechendes Yukawapotential zugrunde.

Es ist klar, dass man unter diesen Voraussetzungen nur für relativ grosse Abstände der beiden α -Teilchen Aussagen über den Verlauf des effektiven Potentials gewinnen kann und Berechnungen der Streuphasen, die ja die eigentliche Aufgabe solcher Untersuchungen sind, nicht mit genügender Genauigkeit durchführen kann. Zu dem Zwecke muss man wirklich den Austauschterm (22) betrachten und u. a. untersuchen, in welcher Form er eine Abstossung der α -Teilchen enthält.

In der Arbeit (Sp 59) befasst sich v. d. Spuy mit diesem Problem. Auch hier geht es nicht ohne vereinfachende Annahmen. Es wird vorausgesetzt, dass

1. keine wesentliche Polarisierung der α -Teilchen eintritt und dass die Wellenfunktion für die innere

Bewegung angesetzt werden kann

$$(35) \quad \chi = e^{-\alpha \left\{ \sum_{i=1}^4 (v_i - \alpha_1)^2 + \sum_{i=5}^8 (v_i - \alpha_2)^2 \right\}} g(1234) g(5678)$$

2. die Kernkräfte durch (34) gegeben seien.

Beide Annahmen sind bis zu einem gewissen Grade willkürlich; daher haben die Folgerungen nur eine eingeschränkte Gültigkeit für den allgemeinen Fall. Wenn nämlich die α -Teilchen einander so nahe kommen, dass die nukleare Wechselwirkung eine wesentliche Rolle spielt, tritt sicher eine Polarisierung der α -Teilchen ein; ja es ist sogar fraglich, ob die innere Bewegung in guter Näherung in ein Produkt zweier α -Teilchenfunktionen zerlegt werden kann. Die zweite Annahme ist deswegen bedenklich, weil der Ansatz für die Zweikörperkräfte nur entweder die Zweinukleonenstreuaten oder die Sättigungsbedingungen befriedigen kann. Da hier auf Erfüllung der Sättigungsbedingungen verzichtet wird, muss die Sättigung durch eine bestimmte Fixierung des Parameters α in den Wellenfunktionen erzwungen werden. Eine Berücksichtigung von Hardcores in (34) würde eine erhebliche Modifizierung des Ansatzes (35) erfordern.

Die Annahmen 1 und 2 werden auch bei der Behandlung der leichten Kerne nach dem Schalenmodell gemacht (vgl. Anhang). Somit sind fast alle Einwände, die gegen das Schalenmodell erhoben werden können, auch hier möglich.

Unter diesen Annahmen gelingt es nun, den Integral kern K auszurechnen. Es würde uns zu weit von unserem eigentlichen Thema abbringen, wenn wir den recht komplizierten Ausdruck hier diskutieren wollten. Wir wollen nur noch skizzieren, wie die Weiterbehandlung der Gleichung (31) erfolgt, und zu welchen Aussagen man gelangt.

Wir führen den Partialwellenansatz

$$(36) \quad F = \sum_L \frac{f_L}{R} \gamma_L(\vartheta)$$

in (31) ein und erhalten mit der Abkürzung

$$k_L(R, R') = 2\pi R R' \int_{-1}^{+1} K(R, R') P_L(\cos \alpha) d(\cos \alpha) \quad (\cos \alpha = \frac{R R'}{R R'})$$

$$(37) \quad \left\{ -\frac{\hbar^2}{4M} \frac{d^2}{dR^2} + \frac{\hbar^2}{4M} \frac{L(L+1)}{R^2} + (V_D + V_C) \right\} f_L =$$

$$= E f_L - \int_0^\infty dR' k_L(R, R') f_L(R')$$

($\mathcal{O} \cdot F$ verschwindet für den Ansatz (35).) Eine Entwicklung von k_L in eine Taylorreihe um $R = R'$ liefert

$$(38) \quad \int_0^\infty k_L(R, R') f_L(R') dR' = \sum_{n=0}^\infty \left(\int_0^\infty k_L(R, R') \frac{(R' R)^n}{n!} dR' \right) \frac{d^n}{dR^n} f_L(R)$$

$$= \sum_{n=0}^\infty V_{nL}(R) \cdot f_L^{(n)}(R)$$

Das Potential V_{nL} ist $1/n!$ mal dem n -ten Moment des Integralkernes um den Punkt $R = R'$. Es ist beschränkt, da k_L nur eine geringe Reichweite hat, nämlich nur von Null verschieden ist, wenn die α -Teilchen sich überlappen. Wir können daher annehmen, dass nur wenige Terme in der Entwicklung eine Rolle spielen.

Tragen wir die Entwicklung (38) in (37) ein, so erhalten wir mit den Abkürzungen

$$(39) \quad \phi_L = \frac{\hbar^2}{4M} \frac{L(L+1)}{R^2} + V_D + V_C + V_{OL}$$

$$(40) \quad \mathcal{D} f_L = - \sum_{n=1}^\infty V_{nL} f_L^{(n)}(R)$$

$$(41) \quad \left(-\frac{\hbar^2}{4M} \frac{d^2}{dR^2} + \phi_L \right) f_L(R) = E f_L + \mathcal{D} f_L$$

Das Resultat wollen wir in den beiden Aussagen festhalten:

1. Die Potentiale sind möglicherweise drehimpulsabhängig

2. Die Annahme, dass nur das Glied V_{oL} berücksichtigt werden muss, dass wir also den nichtlokalen Charakter von k_L vernachlässigen können, stellt eine gute Näherung dar.

Eine Berücksichtigung der Geschwindigkeitsabhängigkeit würde eine Einführung weiterer Parameter in das semiphänomenologische Potential erfordern. Wir werden sehen, dass das in dem betrachteten Energiebereich nicht nötig ist, da bereits eine gute Wiedergabe der experimentellen Daten möglich ist. Abgesehen davon ist eine Berücksichtigung von Gliedern mit $n > 2$ problematisch, da sich dann die Ordnung der Differentialgleichung erhöht.

III. Antisymmetrisierung und Relativbewegung

Wir wollen nun beweisen, dass es genügt, in der Funktion F (I 15) Glieder zu berücksichtigen, die wenigstens proportional R^4 sind, dass also Glieder mit niedrigerer Potenz in R bei der Antisymmetrisierung wegfallen. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Funktion

$$(1) \quad f = O \left\{ F(R) \cdot \varphi_0(x_1 - x_2, x_3 - x_4, x_5 - x_6, x_7 - x_8) g(1234) \right. \\ \left. \cdot \varphi_0(x_1 - x_2, x_3 - x_4, x_5 - x_6, x_7 - x_8) g(5678) \right\}$$

Die R_i sind in (I 4) definiert. Die Determinanten g der Spin- und Ladungsspinfunktionen (II 17) können wir durch die Diagonalglieder ersetzen, da aus diesen beim Antisymmetrisierungsprozess bereits die Determinanten entstehen, wenn nur die Funktion φ_0 in den Argumenten 1...4 bzw. 5...8 symmetrisch ist, was wir annehmen wollen. Wir setzen weiter voraus, dass die Funktionen φ_0 , F translations- und drehinvariant sind. In der Taylorreihe für diese Funktionen fallen dann alle Glieder ungerader Ordnung heraus, und die verbleibenden Glieder zweiter und vierter Ordnung können nur von den Argumenten

$$(2) \quad R^2 = (x_1 - x_2)^2 \quad R^4 = (x_1 - x_2)^4$$

$$(3) \quad I_1 = \sum_{i,j=1}^4 (x_i - x_j)^2 \quad I_2 = \sum_{i,j=1}^4 (x_i - x_j)^2 (x_i - x_j)^2 \\ I_3 = \sum_{i,j=1}^4 (x_i - x_j)^4 \quad I_4 = \sum_{i,j=1}^4 [(x_i - x_j)(x_j - x_i)]^2$$

$$(4) \quad I'_1 = \sum_{j=5}^8 (x_j - x_1)^2 \quad I'_2 = \sum_{j=5}^8 [(x_j - x_1)^2 (x_5 - x_1)^2] \\ I'_3 = \sum_{j=5}^8 (x_j - x_1)^4 \quad I'_4 = \sum_{j=5}^8 [(x_j - x_1)(x_5 - x_1)]^2$$

abhängen. Die anderen Glieder zweiter oder vierter Ordnung, die mit der Symmetrie in den Indizes 1...4

bezw. 5...8 verträglich sind, z. B.

$$(5) \quad \sum_{i,k,l=1}^4 (v_i - x_1)(v_k - x_1)(v_l - x_1)^2 \quad \text{oder} \\ \sum_{i,k=1}^4 (v_i - x_1)(v_k - x_1)$$

verschwinden bei Berücksichtigung der Relationen (I 4) für

Dann ergibt sich für die Taylorreihe von

$$(6) \quad f = a \{ [a_0 + a_1 x^2 + a_2 (I_1 + I_1') \\ + b_1 x^4 + b_2 (I_2 + I_2') + b_3 (I_3 + I_3') \\ + b_4 (I_4 + I_4') + b_5 x^2 (I_1 + I_1')] d_1(1) \dots d_4(8) \} \\ + \text{Glieder höherer Ordnung}$$

Da die in dem Permutationsoperator

$$(7) \quad \mathcal{A}' = (1 - P_{(15)})(1 - P_{(26)})(1 - P_{(37)})(1 - P_{(48)})$$

vorkommenden Permutationen eine Untergruppe der σ_8 bilden, können wir den Antisymmetrisierungsoperator $\mathcal{A}$ analog zu (I 21) zerlegen in

$$(8) \quad \mathcal{A} = \mathcal{N}' \mathcal{A}'$$

also zunächst nur eine Antisymmetrisierung nach $\mathcal{A}'$ vornehmen. Dann fallen in (6) alle diejenigen Glieder weg, die nicht wenigstens einen Index aus jedem der folgenden Indexpaare enthalten:

$$(9) \quad (1,5) \quad (2,6) \quad (3,7) \quad (4,8)$$

Kommt etwa weder der Index 1 noch der Index 5 vor, so verschwindet das entsprechende Glied bei Anwendung des Operators $(1 - P_{(15)})$, da es bei der Permutation (15) - in Zykelschreibweise - ungeändert bleibt.

Die verbleibenden Glieder haben die Form

$$(10) \quad \left[(\kappa_{15} \cdot \kappa_{26}) (v_{37} \cdot v_{48}) + (\kappa_{15} v_{37}) (\kappa_{26} v_{48}) + (v_{15} \cdot v_{48}) (\kappa_{26} v_{37}) \right] \times \\ \times \alpha_1(1) \alpha_2(2) \alpha_3(3) \cdot \alpha_4(4) \cdot \alpha_4(5) \alpha_2(6) \alpha_3(7) \alpha_4(8) \\ v_{i,k} = v_i - v_k$$

und sind somit alle äquivalent dem Gliede R^4 , das ebenfalls in (6) vorkommt und nicht vollständig verschwindet.

Die Verallgemeinerung dieser Aussage auf Funktionen der Form

$$(11) \quad F(\mathcal{R}) \cdot \phi(v_4 - \mathcal{R}_1 \dots v_4 - \mathcal{R}_1; v_5 - \mathcal{R}_2 \dots v_8 - \mathcal{R}_2) g(1234) g(5678)$$

die antisymmetrisch sind gegenüber Permutationen der Untergruppe U der $\mathcal{T}_8$ (vgl. Abschnitt I), ist einfach. Wir entwickeln wieder in eine Taylorreihe, tragen für die $\mathcal{R}_j$ die κ_i ein und antisymmetrisieren dann zunächst mit dem Operator $\mathcal{O}'(7)$. Wieder fallen alle Glieder weg, die nicht wenigstens vierfach linear in den κ_i , also von 4. Ordnung sind, und die verbleibenden Glieder haben wieder die Form (10).

Wir können somit für F den Ansatz machen:

$$(12) \quad F = c_0 R^4 + c_1 R^6 + \dots$$

IV. Aufstellung des semiphänomenologischen Potentials

Im vorigen Abschnitt haben wir gefunden, dass die Wellenfunktion für die Relativbewegung zweier α -Teilchen wie folgt angesetzt werden kann

$$(1) \quad F = c_0 R^4 + c_1 R^6 + \dots$$

Über diese allgemeine Aussage hinaus werden wir im Folgenden auch die Schalenmodellwellenfunktionen für die virtuellen Zustände des Be 8, des Compoundkernes zweier α -Teilchen, heranziehen (Anh. I, 21)

$$(2) \quad \psi_0 = c_0 R^4 e^{-qR^2} \quad L=0$$

$$\psi_2 = c_2 R^4 e^{-qR^2} y_{2m}(\vartheta, \varphi) \quad L=2$$

$$\psi_4 = c_4 R^4 e^{-qR^2} y_{4m}(\vartheta, \varphi) \quad L=4$$

sowie die Anregungsenergien dieser Zustände

$$(3) \quad E_0 = 0.096 \text{ MeV} \quad L=0$$

$$E_2 = 2.996 \text{ " } \quad L=2$$

$$E_4 = 10.6 \text{ " } \quad L=4$$

Zur Bestimmung des semiphänomenologischen $\alpha\alpha$ -Potentials gehen wir von folgender Frage aus: Wie muss das Potential aussehen, für das die Lösungen der Schrödingergleichung

$$(4) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_R \psi_L + V \psi_L = E_L \psi_L$$

die Form (2) haben und zu den Energie-Eigenwerten (3) gehören? Eine ähnliche Überlegung wurde durchgeführt von Skyrme (Sk 56).

Die ψ_L in (2) bedeuten nichts anderes als der Anteil der Relativbewegung in den Wellenfunktionen der

Gleichung (Anh. V 20). Die Faktoren, die die innere Bewegung beschreiben

$$(5) \quad e^{-\frac{q}{2} \left(\frac{3}{4} \beta_1^2 + \frac{2}{3} \beta_2^2 + \frac{1}{2} \beta_3^2 \right)} \cdot g(1234)$$

$$e^{-\frac{q}{2} \left(\frac{3}{4} \beta_4^2 + \frac{2}{3} \beta_5^2 + \frac{1}{2} \beta_6^2 \right)} \cdot g(5678)$$

sind die Schalenmodellfunktionen für den Grundzustand des α -Teilchens, ihr Produkt ist identisch mit (II 35). Da die α -Teilchen bei den von uns betrachteten Energien bis zu 11,5 MeV (im Schwerpunktsystem der beiden α -Teilchen) nicht angeregt werden können (Ei 56), wird die innere Bewegung vor und nach der Streuung durch die gleichen Funktionen beschrieben. Wir können diese Faktoren also weglassen, wenn unser Streupotential nur vom relativen Abstand der beiden α -Teilchen abhängt, was wir annehmen wollen. Der Faktor

$$(6) \quad e^{-4q r^2}$$

in (Anh. V 19) beschreibt im Rahmen des Schalenmodells die Schwerpunktsbewegung des Kernes Be 8 und kann ebenfalls als bedeutungslos weggelassen werden.

Wir tragen die Lösungen (2) in (4) ein und erhalten nach Abtrennung des Winkelanteils

$$\psi_L = \frac{R_L}{R} y_{L,m}(\vartheta, \varphi)$$

$$(7) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dR^2} R_L + \left(\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{R^2} \frac{1}{k^2} + V - E_L \right) R_L = 0$$

Jetzt entwickeln wir R_L und das Potential V nach Potenzen von R

$$(8) \quad R_L = c_L \cdot R^5 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} (q R^2)^{\nu} = c_L R^5 e^{-q R^2}$$

$$(9) \quad V = \frac{\hbar^2}{2m} R^k \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \cdot R^{2\nu}$$

und erhalten durch Koeffizientenvergleich

$$(10) \quad a_0 = 20 - L(L+1) \quad ; \quad K = -2$$

$$(11) \quad a_1 = \frac{2mE_L}{\hbar^2} - 22q$$

$$(12) \quad a_2 = 4q^2$$

Es ergibt sich also für das Potential V

$$(13) \quad V = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{20 - L(L+1)}{R^2} + E_L - \left(22q \cdot \frac{\hbar^2}{2m} \right) + \frac{4\hbar^2 q^2 R^2}{2m}$$

Wir betrachten nun den Streuprozess unter folgender Modellvorstellung: Für R kleiner als a, dessen Grösse etwa dem Durchmesser des α -Teilchens entspricht, sehen wir das quantenmechanische System der beiden α -Teilchen als Compound-system an, während wir für R grösser als a alle spezifisch nuklearen Kräfte vernachlässigen und ein reines Coulombpotential annehmen.

Zur Begründung dieser Betrachtungsweise führen wir an:

1. Die de-Broglie-Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ ist selbst bei den höchsten Energien, für die bisher zuverlässige Phasenanalysen vorliegen, noch merklich grösser als der Durchmesser der α -Teilchen, der etwa 3,5 f beträgt (Ho 56) (vgl. Fig 2). Daher kommt es in Intervallen, die kleiner als 1 f sind, auf Einzelheiten im Verlauf des Potentials nicht an. Neben einem abstossenden Glied können wir dann den spezifisch nuklearen Anteil der Wechselwirkung zwischen den α -Teilchen durch ein Kastenpotential beschreiben, dessen Weite durch einen Parameter a festgelegt ist. Ausserhalb des Kastens ($R > a$) spielen nur die Coulombkräfte eine Rolle.

Für den inneren Bereich machen wir keine besonderen Annahmen über den Verlauf des elektrostatischen Potentials, sondern denken uns diese Wechselwirkung vielmehr in dem Potential der Kernkräfte enthalten.

2. Wie im Abschnitt III gezeigt wurde, ergibt sich als Konsequenz des Pauliprinzipes, dass die Wellenfunktion für die Relativbewegung zweier -Teilchen für kleine Abstände proportional ist der vierten Potenz des relativen Abstandes. Die hierin liegende Abstossungstendenz können wir gemäss (13) näherungsweise durch das Zusatzpotential

$$(14) \quad \frac{20 - L(L+1)}{R^2} \frac{\hbar^2}{2m}$$

beschreiben.

Wir nehmen dabei an, dass trotz der Hardcores in der Zweinukleonen Wechselwirkung die Relation (1) gilt und darüberhinaus die Schalenmodellfunktionen eine gute Näherung für die Wellenfunktion des Kerns darstellen.

3. Das zweite Glied in der Entwicklung (9) hängt ab von der Stärke des radialen Abfalls der Wellenfunktion. Diese ist bei allen Wellenfunktionen des Oszillatorpotentials (Anh. IV, 21) gleich, was bei allgemeineren Potentialen nicht mehr unbedingt der Fall ist. Dennoch wird die Relation (11) zumindestens eine brauchbare Näherung darstellen. Wir werden sie in der Weise anwenden, dass wir für die verschiedenen Drehimpulse L die Differenzen zwischen den Anregungsenergien E_L und der Potentialtopftiefe U_L konstant halten.

4. Nachdem wir nunmehr die Form des Potentials festgelegt haben: Kastenpotential mit abstossendem Teil, die Topftiefen für die verschiedenen Drehimpulse relativ zueinander festgelegt haben, andererseits die Weite a des Potentialtopfes, die im wesentlichen durch den Radius des α -Teilchens bestimmt ist, noch offenlassen wollen, verbleibt uns die Bestimmung des absoluten Wertes der Potentialtopftiefe U_0 . Diese legen wir so fest, dass für $E_0 = 96,5$ keV ein virtuelles Niveau vorliegt. Infolge der breiten Coulombbarriere ist dieses Niveau recht scharf

definiert. Wie in Abschnitt V gezeigt wird, bedeutet diese Bedingung, dass die logarithmische Ableitung D_0 für $R = a$ praktisch unabhängig von a den Wert hat:

$$(15) \quad D_0 = -1,24$$

5. In die Bestimmung des Potentials, wie wir sie hier vorgenommen haben, gehen die Anregungsenergien der angeregten Zustände ein. Diese sollten prinzipiell aus Schalenmodellrechnungen oder sonstigen Berechnungen entnommen werden. Nun ist die Übereinstimmung zwischen den Werten nach dem Schalenmodell mit denen des experimentellen Niveauschemas zwar nicht vorzüglich, aber doch immerhin so gut, dass die Mängel durch die unvollkommene Kenntnis der Kernkräfte, insbesondere die Nichtberücksichtigung der Spin-Bahnkopplung und der Tensorkräfte erklärt werden können. Oder umgekehrt: Man kann die in diese Kräfte eingehenden Konstanten innerhalb vernünftiger Grenzen noch so variieren, dass eine genaue Übereinstimmung erzielt wird. In den Gleichungen (Anh. VI, 8) lassen sich z. B. β und die Koeffizienten a, b, c, d noch in gewissen Grenzen variieren, ferner ist die in die Wellenfunktionen (Anh. IV, 13) eingehende Konstante q noch in gewissen Grenzen unbestimmt. Wir werden daher die in unsere Rechnungen eingehenden Anregungsenergien dem empirischen Niveauschema entnehmen. (Abb. 1)

Die in Frage kommenden Niveaus stützen sich natürlich z. T. auf die Ergebnisse der α - α -Streuung. Aber es gibt auch zahlreiche andere Experimente, die auf angeregte Niveaus des Kernes Be 8 bei 2,9 und 10,5 MeV hinweisen. Z. B. der β -Zerfall des Li 8 (Ho 50, vgl Aj 55). Damit unsere Darstellung konsistent ist, stellen wir uns auf den Standpunkt, dass die Anregungsenergien bereits aus anderen Reaktionen als der α - α -Streuung gewonnen wurden und daher neben den Streuphasen der α - α -Streuung zusätzliches Informationsmate-

rial darstellen, auf das wir uns bei der Interpretation der α - α -Streuung stützen dürfen.

Wir fassen die Überlegungen nun zusammen, indem wir das semiphänomenologische Potential, das uns in den folgenden Abschnitten noch weiter beschäftigen wird, noch einmal hinschreiben: (m = reduzierte Masse = $2M = 2$ Nukleonenmassen)

$$(16) \quad V_L(R) = \begin{cases} \frac{\hbar^2}{2mR^2} (20 - L(L+1)) + U_L & \text{für } r \leq a \\ + \frac{4e^2}{R} & r > a \end{cases}$$

mit (vgl. S. 42 und Fig. 7)

$$(17) \quad U_0 = - U(a, D_0)$$

$$U_2 - U_0 = E_2 - E_0 = 2.9 \text{ MeV}$$

$$U_4 - U_0 = E_4 - E_0 = 10.5 \text{ MeV}$$

In ihm wurden berücksichtigt:

1. Die im Pauliprinzip liegende Abstossungstendenz zwischen gleichen Teilchen.
2. Die - wenigstens im Prinzip nach dem Schalenmodell zu berechnenden - Energiewerte für die angeregten Zustände des Compoundkernes Be 8.

Mit diesem Potential wollen wir nun die Streuphasen ausrechnen. Der eine noch vorkommende Parameter a kann zur Anpassung benutzt werden. Wir werden sehen, dass der Zahlenwert von a schon durch die Streuphasen δ_L für $L = 0$ festgelegt ist, so dass eine Übereinstimmung mit den experimentellen Streuphasen δ_L für $L = 2$ und $L = 4$ eine Aussage zu Gunsten unseres Modells bedeutet.

Abgesehen davon, wie sich das semiphänomenologische Potential aus den Zweikörperkräften berechnen lässt, blieb hier auch die Frage unbeantwortet, in welcher Weise bei höheren Energien als 11,5 MeV (im Schwerpunktsystem) die eventuell dabei auftretenden Streuphasen δ_L mit $L = 4$, ferner wie die höheren Anregungsstufen für $L = 0, 2, 4$ Berücksichtigung finden sollen.

Die im nächsten Abschnitt vorgelegten Ergebnisse der Streurechnung zeigen, dass die Streudaten durch (16) besser wiedergegeben werden als durch das Haefnerpotential

$$(18) \quad V(R) = \begin{cases} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{q^2}{R^2} - U & \text{für } R \leq a \\ \frac{4e^2}{R} & \text{für } R > a \end{cases}$$

$$(q^2 = 30)$$

Zur Veranschaulichung haben wir in Fig. 3 bis 5 das Potential V_L (16) inklusive Zentrifugal-Barriere aufgezeichnet

$$(19) \quad V = V_L(R) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{L(L+1)}{R^2}$$

V. Durchführung und Ergebnisse der Rechnung

Im ersten Teil dieses Abschnittes werden wir aus der Streutheorie diejenigen Formeln und Grössen einführen, die für die Berechnung der Streuung für das im vorigen Abschnitt (IV 16) angegebene Potential nötig sind. Anschliessend skizzieren wir das Vorgehen bei der Durchführung der Streurechnung und legen an Hand von graphischen Darstellungen das Ergebnis dieser Streurechnung vor.

Der Ausgangspunkt der Streurechnung ist die Schrödingergleichung für die Relativbewegung zweier Teilchen:

$$(1) \quad \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) \right] \psi(r) = E \psi(r)$$

m ist darin die reduzierte Masse, die sich aus den Massen M_1 und M_2 der beiden Streupartner gemässe

$$(2) \quad m = \frac{M_1 \cdot M_2}{M_1 + M_2}$$

berechnet. E ist die Energie der Relativbewegung im Schwerpunktsystem. Sie berechnet sich aus der Energie des einfallenden Teilchens im Laborsystem (Teilchen 2 ruht anfangs im Laborsystem)

$$(3) \quad E = \frac{M_2}{M_1 + M_2} E_{lab}$$

$V(r)$ gibt das Wechselwirkungspotential an zwischen den beiden Streupartnern.

Für die α - α -Streuung sind

$$(4) \quad M_1 = M_2 \approx 4 \text{ Nukleonenmassen}$$

Wir haben es hier mit zwei gleichen Teilchen zu tun, die Lösungen von (1) müssen daher entweder symmetrisch oder antisymmetrisch bei Vertauschung der beiden α -Teilchen sein. Da die α -Teilchen aus 4 Nukleonen

bestehen, die der Fermistatistik folgen, multipliziert sich die Wellenfunktion bei Vertauschung der α -Teilchen mit dem Faktor $(-1)^L = +1$. Wir haben also nur symmetrische Wellenfunktionen zu berücksichtigen. (vgl. I, 23)

Für das Wechselwirkungspotential müssen wir die Ansätze (IV 16) und (IV 18) diskutieren. In beiden Fällen ist V kugelsymmetrisch, so dass wir den Partialwellenansatz (II 36) in (1) eintragen können. Wir erhalten:

$$(5) \quad \frac{d^2}{dR^2} f_L + \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(R)) - \frac{L(L+1)}{R^2} \right\} f_L(R) = 0$$

Da die Kugelfunktionen zu ungeraden L bei Vertauschung der Teilchen antisymmetrisch sind, können ungerade Drehimpulse bei der α - α -Streuung nicht auftreten. Wir tragen nun die Wechselwirkungspotentiale ein (IV 16, 18) und erhalten für $R < a$:

a) für das Haefnerpotential

$$(6) \quad \frac{d^2}{dR^2} \bar{f}_L + \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} (E + U) - \frac{L(L+1) + 9}{R^2} \right\} \bar{f}_L = 0$$

b) für das semiphänomenologische Potential

$$(7) \quad \frac{d^2}{dR^2} f_L + \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_L) - \frac{20}{R^2} \right\} f_L = 0 \quad \text{für } L \leq 4$$

Für $R > a$ ergibt sich in beiden Fällen

$$(8) \quad \frac{d^2}{dR^2} f_L + \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} E - \frac{L(L+1)}{R^2} - \frac{4e^2}{R} \right\} f_L = 0$$

Wir betrachten den Energiebereich $E \leq 12$ MeV, also den Bereich, für den die Streuphasen bekannt sind. Hier spielen nur die Streuphasen für $L = 0, 2, 4$ eine Rolle; wir können daher die Betrachtungen auf $L \leq 4$ beschränken.

Wir wollen nun zunächst die Gleichungen (6) und (7) weiterbehandeln und führen die Abkürzungen ein:

$$(9) \quad q^2 + L(L+1) = p(p+1)$$

$$(10) \quad \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_L) = k_L^2 \quad \frac{2m}{\hbar^2} (E + U) = \bar{k}^2$$

$$(11) \quad y = k_L R \quad \bar{y} = \bar{k} R$$

und erhalten aus (6)

$$(12) \quad \bar{f}_L''(\bar{y}) + \left\{ 1 - \frac{\rho(\rho+1)}{\bar{y}^2} \right\} \bar{f}_L(\bar{y}) = 0$$

Für (7) ergibt sich entsprechend (' bedeutet Ableitung nach y)

$$(13) \quad f_L''(y) + \left\{ 1 - \frac{20}{y^2} \right\} f_L(y) = 0$$

In beiden Fällen lassen sich die Lösungen durch die Bessel-Funktionen $J_n(y)$ darstellen (Ja 48)

$$(14) \quad \bar{R}_L(\bar{y}) = \sqrt{\bar{y}} J_{\rho+\frac{1}{2}}(\bar{y})$$

$$(15) \quad R_L(y) = \sqrt{y} J_{4+\frac{1}{2}}(y)$$

Für $q^2 = 30$ ist nun

(Tabelle 1)	L	p(p+1)	p
	0	30	5
	2	36	5,5208
	4	50	6,5887

Die Besselfunktionen sind tabuliert für ganz- und halbzahliges n. Ersetzt man daher näherungsweise für L = 2 und L = 4 die zugehörigen Zahlenwerte für p durch 5,5 bzw. 6,5, so lässt sich die Streurechnung nach dem Haefnerpotential für alle drei Drehimpulse mit tabulierten Funktionen durchführen, was die Rechnungen vereinfacht. Hierin ist auch der Grund zu suchen, warum in diesem Potential $q^2 = 30$ gesetzt wurde.

In unserem semiphänomenologischen Potential liegen

insofern ähnliche Verhältnisse vor, als wir für alle drei Drehimpulse die ebenfalls tabulierten Zylinderfunktionen zum Index $p = 4$ verwenden können.

Für die Streurechnung spielt die "logarithmische Ableitung am Kernrand" eine grosse Rolle. Wir bezeichnen sie mit

$$(16) \quad D_1(a, E, L) = \frac{y \cdot R_L'(y)}{R_L(y)} \Big|_{y=a \cdot k_L}$$

Jetzt betrachten wir die Lösungen der Gleichung (8) für $R > a$ (Mo 49). Wir führen wieder einige Abkürzungen ein: (Beim Vergleich mit I ist $m = 2M$ zu berücksichtigen.)

$$(17) \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \eta = \frac{4e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2E}} \quad (\text{vgl. Fig. 2})$$

$$(18) \quad x = R \cdot k$$

und erhalten:

$$(19) \quad \frac{d^2}{dx^2} f_L + \left(1 - \frac{L(L+1)}{x^2} - \frac{2\eta}{kx} \right) f_L = 0$$

Die Coulombfunktionen F_L, G_L (I 30, 31, 32) bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen dieser Differentialgleichung, dessen Wronski-Determinante den Wert

$$F_L' G_L - F_L G_L' = 1$$

hat; Die Striche bedeuten darin Ableitungen nach x .

Tafeln der Coulombfunktionen wurden von Bloch (Bl 51) angegeben. Hinweise auf weitere Tafelwerke finden sich in (Fr 55). Darüberhinaus gibt es für $L = 0$ die sehr ausführlichen Tafeln von Tubis (Tu 58).

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (19) lässt sich darstellen durch

$$(20) \quad f_L(x, \eta)' = c \sin f_L \left(F_1 \log f_L + G_1 \right)$$

Ihr asymptotisches Verhalten ist durch

$$(21) \quad f_L \cong c \cdot \sin \left(x - \frac{L\pi}{2} - \eta \ln x + \arg(1 + i\eta) + \delta_L \right),$$

gegeben. Wir bilden jetzt wieder die "logarithmische Ableitung am Kernrand":

$$(22) \quad \mathcal{D}_a(a, E, L) = \frac{x f_L'(x, \eta)}{f_L(x, \eta)} \Big|_{x=ka} \\ = \left(\frac{x \cdot E'}{E} - \frac{1}{\frac{E^2}{x} \frac{d\eta}{dL} + \frac{E G_L}{x}} \right) \Big|_{x=ka}$$

Die letzte Form ist besonders günstig für die numerischen Rechnungen mit Hilfe der Tafeln (Bl 51).

Die Wellenfunktion für den Streuprozess erhalten wir, wenn wir am Kernrand, d. h. für $R = a$, die Wellenfunktion des inneren Bereiches stetig und mit stetiger Ableitung nach R an die des äusseren Bereiches anschliessen. Da uns der Wert der Konstanten c in (20) nicht näher interessiert, genügt es, die Stetigkeit der logarithmischen Ableitung am Kernrand zu fordern. Wir erhalten also die Bedingung

$$(23) \quad \mathcal{D}_i(a, E, L) = \mathcal{D}_a(a, E, L)$$

aus der sich die Streuphasen berechnen lassen.

Damit haben wir alle Grössen, die wir bei der Diskussion der Streurechnungen benötigen, bereitgestellt. Bevor wir mit dieser Diskussion beginnen, müssen wir noch auf einen Punkt zu sprechen kommen, den wir in Abschnitt IV zurückgestellt haben. Das ist die Frage, wie die Potentialtopftiefe U_0 bestimmt wird. Auf Seite 34 haben wir gesehen, dass diese Konstante so festgelegt werden soll, dass ein virtuelles Niveau bei 96,5 keV liegt.

Infolge der breiten Coulomb-Barriere und der geringen Energie des virtuellen Zustandes, ist die-

ser sehr scharf und alle Definitionen des "virtuellen Zustandes" liefern im Rahmen der Rechengenauigkeit dasselbe Ergebnis. Wir bestimmen die Wellenfunktion für diesen Zustand dadurch, dass wir die Randbedingung

$$(24) \quad f_0(c, k, \eta) = 0$$

für $a \ll c$, $\eta = 2,89$ dh. $E = 96,5$ keV fordern. Für $c = 57,6$ f ist das Coulombpotential noch grösser als $96,5$ keV, so dass die Wellenfunktion im äusseren Bereich monoton abfällt, wie man es von den stationären Zuständen her kennt.

Die Randbedingung (24) hat zur Folge, dass für die Phasenverschiebung δ_0 in (20) im Rahmen der Rechengenauigkeit als 90° herauskommt. Für die logarithmische Ableitung am Kernrand ergibt sich dann

(Tabelle 2)	a	$D_0 = D(a, E_0)$
	3,5 f	- 1,236
	4,0 f	- 1,239
	4,2 f	- 1,240
	4,5 f	- 1,241
	4,8 f	- 1,242

Man kann also in guter Näherung $D_0 = - 1,24$ setzen, unabhängig vom speziellen Wert von a. Die Konstante U_0 berechnet sich aus der Bedingung, dass die logarithmische Ableitung der Wellenfunktion des inneren Bereiches ebenfalls $D_1(a, E_0) = - 1,24$ beträgt. (vgl Fig. 7)

Die Rechnungen werden zum Teil auch noch für andere Potentialtopftiefen durchgeführt, deren Zahlenwerte wir ebenfalls durch die logarithmische Ableitung am Kernrand festlegen (vgl. Fig. 6, 7).

Nun wollen wir kurz ein paar Worte sagen zur Durchführung der Rechnungen und zur Darstellung des Ergebnisses.

Die Aufgabe besteht darin, zu dem Potential (IV 16) die Streuphasen σ_L zu bestimmen. Die Rechnungen basieren auf Gleichung (23), die mit Hilfe von (22) und (16) nach den Streuphasen σ_L aufgelöst werden kann. Wir müssen noch festlegen, für welche Werte des Parameters a die Rechnungen durchgeführt werden sollen, und für welche Energiewerte wir die σ_L bestimmen wollen.

Da der Radius des α -Teilchens etwa $2 f$ beträgt und a etwa dem doppelten Radius entspricht, wird man Zahlenwerte von a $4 f$ berücksichtigen. Wir legen den Rechnungen die folgenden Werte zugrunde:

(Tabelle 3)	$a =$	$3,5 f$
		$4,0 f$
		$4,2 f$
		$4,5 f$
		$4,8 f$

Die Energiewerte, für die die Rechnungen durchgeführt werden, legen wir so fest, dass sich bei Benutzung der Tafeln (Bl 51) einfache Verhältnisse ergeben. Die Coulombfunktionen (I 30 bis 32) hängen von 2 Variablen ab, dem reduzierten Radius $x = k.R$ und dem Geschwindigkeitsparameter η . Sie erfordern daher im allgemeinen Interpolation in beiden Variablen. Wir wollen nun für den Geschwindigkeitsparameter möglichst diejenigen Werte verwenden, für die in den Tafeln (Bl 51) die Funktionen F_L und G_L wirklich angegeben sind. Es sind dies:

(Tabelle 4)

$\log \eta$	η	Energie E in MeV	$\log \eta$	η	Energie E in MeV
- 0,8	0,159	31,9	0,0	1,000	0,801
- 0,7	0,199	20,1	+ 0,1	1,259	0,505
- 0,6	0,251	12,7	+ 0,2	1,585	0,319
- 0,5	0,316	8,01	+ 0,3	1,995	0,201
- 0,4	0,398	5,05	+ 0,4	2,512	0,127
- 0,3	0,501	3,19	+ 0,5	3,162	0,080
- 0,2	0,631	2,01	+ 0,6	3,981	0,050
- 0,1	0,794	1,27			

Wir sehen aus der Tabelle 4, dass die so erhaltenen E-Werte bei höheren Energien noch nicht dicht genug liegen. Wir interessieren uns für das Energie-Intervall 0 bis 12 MeV und müssen darin etwa 10 Punkte möglichst äquidistant verteilen, damit die durch diese Punkte hindurchzulegenden Kurven hinreichend gut definiert sind. Wir müssen also im Intervall $\log \eta = -0,7$ bis $0,6$ noch 4 weitere Punkte, im Intervall $\log \eta = -0,6$ bis $-0,5$ noch 2 und im Intervall $\log \eta = -0,5 \dots -0,4$ noch etwa einen Punkt unterbringen. Um hierfür die Interpolation möglichst einfach zu gestalten, wählen wir die Werte

(Tabelle 5)	$\log$	Energie in MeV
	-0,58	0,263
	-0,56	0,275
	-0,54	0,288
	-0,52	0,302
	-0,47	0,341
	-0,43	0,369
	-0,35	0,447
		11,57
		10,55
		9,63
		8,78
		6,87
		5,89
		4,01

Infolge der abstossenden Zentrifugal- und Coulomb-Barrieren ist es nicht erforderlich die Rechnungen bis in die Nähe von $E = 0$ heranzuführen, sondern man braucht nur bis etwa $E = 0,2$ MeV für $L = 0$, bis $E = 0,8$ MeV für $L = 2$ und $E = 3,1$ MeV für $L = 4$

zu gehen.

Neben der Abhängigkeit vom Parameter a haben wir auch in einigen Fällen die Tiefe des Potentialtopfes U_0 geändert. Wir sind dabei in der Weise vorgegangen, dass wir für die Energie des Grundzustandes von Be 8 die logarithmische Ableitung am Kernrand (D_0 in Tab. 2) nicht gleich $-1,24$ gesetzt haben, wie es die Randbedingung (24) fordert, sondern Werte zwischen $D_0 = -2,48$ und $D_0 = +1,86$ gewählt haben. Aus der logarithmischen Ableitung und dem Parameter a lässt sich dann der Wert von k (16) berechnen, aus welchem weiterhin gemäss (10) die Potentialtopftiefe U_0 zu errechnen ist. Der Illustration dieses Zusammenhanges dienen die Fig. 6 und 7.

Die Rechenarbeit zur Gewinnung der Streuphasen ist im Prinzip einfach aber infolge der zahlreichen Parameterwerte recht umfangreich. Es empfiehlt sich daher, die Rechenarbeit wenigstens dadurch etwas zu vereinfachen, dass man den Vergleich zwischen Modell und Experiment nicht im Endergebnis, den Streuphasen, sondern bereits etwas früher, nämlich in den logarithmischen Ableitungen durchführt. Wir sind dabei so vorgegangen, dass wir aus den experimentell bestimmten Streuphasen ϕ_L für die in den Tabellen 4 und 5 angegebenen Energiewerte interpolierte Streuphasen ϕ_L und mit diesen die logarithmische Ableitung am Kernrand D_a nach (22) berechnet haben. Geeignet zur Beschreibung der experimentellen Streudaten ist unser Modell nur für diejenigen Parameterwerte, für die die zugehörigen Kurven für D_1 (16) in der Nähe der Kurven D_a liegen.

Auf diese Weise haben wir (vgl. Fig. 8 und 9) den Parameter a auf $a = 3,5 f$ festgelegt und für diesen die Streuphasen, die unser Modell liefert, berechnet (vgl. Fig. 24 bis 26).

Die Interpolation der experimentellen Streuphasen wurde vorgenommen mit Hilfe der Formeln der "Effective-Range-Theory" (Ja 50, Ch 49). Für $L = 0$ versagt diese Theorie bei höheren Energien, da bei etwa 10 MeV die Streuphase durch 0^0 geht, also $f(k) \cdot \cotg(\delta_0)$ eine Singularität hat. Die von uns benutzten Formeln der Effektiv-Range-Theorie lauten:

$$(25) \quad K_0(k^2) = f(k) \cotg \delta_0 + \frac{1}{2} g(k) = a_0 + a_1 k^2 + a_2 k^4 \dots$$

$$(26) \quad K_2(k^2) = \varphi_2(f(k) \cotg \delta_2 + \frac{1}{2} g(k)) = b_0 + b_1 k^2 + b_2 k^4 \dots$$

$$(27) \quad K_4(k^2) = \varphi_4(\varphi_2(f(k) \cotg \delta_2 + \frac{1}{2} g(k))) = c_0 + c_1 k^2 + \dots$$

Die darin auftretenden Funktionen f , g , φ_2 , φ_4 sind in Fig 14 und 15 dargestellt. Die Interpolationskurven sind wiedergegeben in Fig. 16 - 19.

Für die Besselfunktionen, die in (15) benötigt werden, standen uns nur die Tafeln von Jahnke-Emde (Ja 48) zur Verfügung, in denen die in Frage kommenden Funktionen nur für wenige Argumentwerte angegeben sind. Wir haben uns geholfen, indem wir die Tafelwerte kubisch interpoliert haben, und die so erhaltenen Funktionswerte mit Hilfe der Differentialgleichung durch Iteration verbessert haben. (Zu 53). Für die numerischen Rechnungen stand uns eine Tischrechenmaschine zur Verfügung.

VI. Diskussion der Ergebnisse

Wie wir bereits im Abschnitt IV erwähnt haben und im Anhang noch genauer sehen werden, liefert das Schalenmodell für Be^8 angeregte Niveaus bei 3 und 10 MeV. Dagegen haben wir in den Rechnungen Niveaus bei 2,9 und 10,5 MeV berücksichtigt. Diese Werte haben wir dem Niveauschema entnommen, das von Ajzenberg (Aj 55) auf Grund der experimentellen Daten aus zahlreichen Reaktionen, mit Be^8 als Compound- oder Restkern, zusammengestellt wurde.

Dieses Niveauschema darf noch nicht in allen Daten als völlig gesichert angesehen werden, da die Aussagen aus den verschiedenen Reaktionen z. Teil einander widersprechen. Dieses gilt insbesondere von den Niveaus bei 4,2; 5,4; 7,5 MeV, denen Inall (In 53a) aufgrund der α - β -Korrelationsexperimente geraden Drehimpuls und gerade Parität zugeordnet hat. Allerdings waren die beobachteten Übergänge zu diesen Niveaus sehr schwach im Verhältnis zu denen in den Grundzustand und das 2,9 MeV Niveau des Be^8 . Eine weitere Stütze dieser Niveaus waren die $\text{Li}^7(\text{dn})$ -Experimente (Ri 39), in denen die Wirkungsquerschnitte maximal waren für Neutronenenergien, die diesen Anregungsenergien von Be^8 entsprechen. Es handelt sich hier um Stripping-Reaktionen, deren Maxima in der Winkelverteilung noch nicht notwendig auf Compoundzustände hinweisen. Ein weiterer Hinweis auf das Niveau bei 7,5 MeV aus den α - α -Streudexperimenten ist inzwischen hinfällig geworden (Wh 41, St 53).

In älteren Zusammenstellungen wurden die Anregungsenergien dieser 3 Niveaus zum Teil etwas anders angegeben, und es lagen sogar Hinweise für ein Niveau negativer Parität vor bei 7,0 MeV (Aj 52). Das merkwürdige an diesen 3 Niveaus ist, dass sie schmal sind im Vergleich zu dem Niveau bei 2,9 MeV,

dass sie andererseits aber infolge ihrer Zerfallsmöglichkeit in 2 -Teilchen nur sehr wenig stabil sein können. Da zahlreiche andere, insbesondere neuere Experimente, zum Teil trotz intensiven Suchens in diesen Energiebereichen, keine Hinweise auf Niveaus geben (Me 58, Ho 55, La 56, Tr 54 u. a.) neigt man heute dazu, die fraglichen Niveaus Reaktionen zuzuschreiben mit Elementen, die in den untersuchten Substanzen in geringen Mengen als Verunreinigung etc. vorhanden waren. Eine andere Erklärungsmöglichkeit für Niveaus in diesem Bereich besteht darin, dass die fraglichen Niveaus ungeraden Drehimpuls oder ungerade Parität haben.

Dass die Zahlenwerte der verbleibenden Niveaus nicht genau mit denen des Schalenmodells übereinstimmen, lässt sich leicht mit zu starken Vereinfachungen in diesem Modell erklären. Neben der sicherlich falschen Wellenfunktion für Be 8 nach dem Schalenmodell - die Zweiteilchenkorrelationen bleiben unberücksichtigt - ist es insbesondere der Ansatz für die Zweikörperkräfte, an dem die Kritik ansetzt. Spin-Bahnpkopplungsanteile können die nach dem Schalenmodell berechneten Energieverhältnisse ändern (In 53, Ku 55). Über die Auswirkung der Tensorkräfte ist bisher nur wenig bekannt (Hi 57, Fe 56). Hier liegt der Grund, warum wir die Anregungsenergien lieber aus dem experimentellen Niveauschema entnommen haben. Immerhin besteht heute noch eine gewisse Hoffnung, bei genauerer Kenntnis der Kernkräfte die Anregungsenergien der leichten Kerne genauer ausrechnen zu können, so dass sich dann auf diesem Gebiete Theorie und Erfahrung decken.

Nun ein paar Worte zu den virtuellen Niveaus. Streng genommen sind alle Niveaus des Be 8 Bestandteile des Streckenspektrums. Dies gilt auch für den Grundzustand, der mit einer Lebensdauer von etwa 10^{-15} sec in 2 -Teilchen zerfällt. Infolge der breiten Coulombpotential-Barriere kann man hier noch in recht guter Näherung von einem gebundenen Zustand

sprechen. Schwieriger wird die Lage bei den anderen Niveaus des Be 8. Da auch hier eine Potentialschwelle das Zerfliessen des Wellenpaketes verhindert, ist es das Beste, das Niveau zu definieren durch die Randbedingung einer negativen logarithmischen Ableitung am Kernrand, deren Zahlenwert ungefähr gleich dem des "fast gebundenen" $L = 0$ Zustandes ist. Zahlenmässig läuft die Behandlung, wie wir sie in Abschnitt IV gegeben haben, auf dasselbe hinaus. Eine Diskussion der Problematik des Begriffes "virtuelles Niveau" hat Ma (Ma 53) an Hand des Deuteron-Singulettzustandes gegeben, für den ähnliche Verhältnisse vorliegen wie beim Be 8.

Die Verbesserungen unseres Potentialmodells gegenüber dem von Haefner (Ha 51) lassen sich an Hand der Abbildungen 21 bis 26 ansehen. Betrachten wir zunächst die Kurven für $L=0$! In diesem Falle unterscheiden sich beide Modelle wenig von einander. Nur bei den höchsten Energien ist eine geringe Verbesserung merkbar. Bei $L = 2$ dagegen lässt sich nach dem Haefnermodell für keinen Wert des Kernradius eine Kurve angeben, die sowohl bei grossen als auch bei kleinen Energien Übereinstimmung mit den experimentellen Werten der Streuphasen zeigt; der relativ beste "fit" würde einen grösseren Wert des Wechselwirkungsradius erfordern als $L=0$.

Bei $L = 4$ ist diese Tendenz noch stärker ausgeprägt. Es wurde sogar in Fig. 23 die Kurve, die dem Wechselwirkungsradius $a = 3,5 f$ entspricht, gar nicht angegeben. In unserem Modell dagegen liefert die Wahl $a = 3,5 f$ eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Werten für alle drei Drehimpulse.

Dass wir nicht bei allen Energiewerten vorzügliche Übereinstimmung mit den experimentellen Werten erhalten, dürfte zum Teil an zu grossen Vereinfachun-

gen in unserem Modell, zum Teil aber auch an den Ungenauigkeiten der experimentellen Winkelverteilungen und der Bestimmung der Streuphasen liegen. Insbesondere ist die Bestimmung der Streuphasen bei $E = 6,15$ und $7,6$ MeV ungenau, wie ein Blick auf die Fig 20 zeigt, die ebenfalls der Arbeit (Ni 58) entnommen wurde und in der die Winkelverteilung für $E_{cm} = \frac{1}{2} E_{lab} = 7,6$ MeV wiedergegeben wird. Für ϑ_{lab} zwischen 28° und 32° sowie bei 40° weicht die berechnete Kurve für $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ von den Messwerten ab. Die Bestimmung der Streuphasen ist daher ungenau, was in der Fehlerangabe der Masspunkte in Fig 21 bis 23 zum Ausdruck kommt. Die Kreuze in Fig. 20 sind Messpunkte von Steigert (St 53) und haben in diesem Zusammenhang keine Bedeutung.

Für $L=2$ fällt insbesondere der steile Abfall der δ_2 -Streuphase nach dem Haefnerschen Modell bei grossen Energien auf (Fig. 22), der ein deutliches Zeichen dafür ist, dass für kleine Werte der Relativ-Koordinate das Potential zu stark repulsiv ist.

Bei allen Kurven ist zu beachten, dass zwischen $E = 3$ MeV und $E = 6$ MeV keine Messwerte vorliegen (gestrichelter Teil der Kurven in Fig. 8 bis 13), dass also eine Übereinstimmung der nach dem Modell berechneten Kurven für die Streuphasen δ_L mit denen aus den interpolierten experimentellen Werten gewonnenen keinerlei Schlüsse zulässt für oder wider das Modell.

Wir würden es sehr begrüßen, wenn in diesem für die $L=2$ -Streuphase kritischen Bereich, sowie in dem Bereich von 6 MeV bis $8,5$ MeV weitere Messungen vorgenommen würden, um auch in diesen Bereichen Modell und experimentelle Resultate vergleichen zu können.

Zu den Grenzen dieses Modells ist folgendes zu sa-

gen: Sollte eines Tages eine Berücksichtigung der Streuphasen zum Drehimpuls $L = 6$ erforderlich sein, so muss im Zusammenhang damit die Frage der höheren angeregten Niveaus von Be 8 untersucht werden, insbesondere müssen im Rahmen des Schalenmodells höhere Anregungsstufen berücksichtigt werden, da in der p-Schale überhaupt kein Niveau mit $L = 6$ vorkommt. Auch in dieser Hinsicht wären weitere experimentelle Untersuchungen der α - α -Streuung interessant.

Herrn Prof. Dr. F. Bopp, Herrn Dr. F. Beck, dem ich die Anregung zu dieser Arbeit verdanke, und Herrn Dr. K. Wildermuth möchte ich herzlich danken für zahlreiche Diskussionen und ihr Interesse an dieser Arbeit. Herrn Prof. Dr. W. Jentschke danke ich für die Übersendung eines Abdrucks der Arbeit(Ni 58) vor ihrer Veröffentlichung.

Anhang I. Die Zerlegung des Antisymmetrisierungsoperators

In Abschnitt I haben wir mehrfach die Zerlegung des Antisymmetrisierungsoperators $\mathcal{A}$ in 2 Faktoren benutzt. Wir wollen uns nun überzeugen, dass unter den dort angegebenen Voraussetzungen eine solche Zerlegung wirklich möglich ist.

Wir gehen aus von einer beliebigen Untergruppe U der Permutationsgruppe $\mathcal{P}_n$. U bestehe aus den Elementen $U_1 \dots U_g$. Die Gruppe $\mathcal{P}_n$ zerfällt dann in linksseitige Nebenklassen zu U (Wa 50). Sei $Q_1=1, Q_2 \dots Q_r$ ein Repräsentantensystem dieser Nebenklassen, so lässt sich jedes Element P_μ der Permutationsgruppe $\mathcal{P}_n$ eindeutig darstellen als Produkt aus einem Element U_σ der Untergruppe und einem Q_ρ :

$$(1) \quad P_\mu = Q_\rho \cdot U_\sigma \quad \begin{matrix} 1 \leq \rho \leq r \\ 1 \leq \sigma \leq g \end{matrix}$$

(μ ist durch ρ und σ eindeutig bestimmt und umgekehrt). Es gelten dann die Relationen

$$(2) \quad \text{sgn } P_\mu = \text{sgn } Q_\rho \cdot \text{sgn } U_\sigma$$

$$(3) \quad n! = r \cdot g$$

Der Antisymmetrisierungsoperator $\mathcal{A}$ zerfällt dann in 2 Faktoren:

$$(4) \quad \begin{aligned} \mathcal{A} &= \sum_{\mu=1}^{n!} (\text{sgn } P_\mu) P_\mu \\ &= \sum_{\rho=1}^r \sum_{\sigma=1}^g (\text{sgn } Q_\rho) (\text{sgn } U_\sigma) \cdot Q_\rho U_\sigma \\ &= \left[\sum_{\rho=1}^r (\text{sgn } Q_\rho) Q_\rho \right] \cdot \left[\sum_{\sigma=1}^g (\text{sgn } U_\sigma) U_\sigma \right] \end{aligned}$$

$$(5) \quad = Q \cdot \mathcal{A}_U \quad \text{mit}$$

$$(6) \quad Q = \sum_{\rho=1}^r (\text{sgn } Q_\rho) Q_\rho \quad \text{und}$$

$$(7) \quad Q_U = \sum_{r=1}^g (\operatorname{sgn} U_r) U_r$$

Q_U antisymmetrisiert bezüglich der Untergruppe U ,
während Q keine so einfache Bedeutung hat.

Da Q_1 die Identität ist, können wir (6) auch so
schreiben:

$$(8) \quad Q = 1 + \sum_{g=2}^n (\operatorname{sgn} Q_g) Q_g$$

Anhang II. Symmetrie des Integralkernes K

Im Anschluss an die Überlegungen im Abschnitt II wollen wir jetzt beweisen, dass der Austausch-
teil der effektiven α - α -Wechselwirkung stets
die Form

$$(1) \quad V_x \cdot F = \int k(\mathcal{R}, \xi) F(\xi) d^3\tau_\xi \quad \text{mit}$$

$$(2) \quad k(\mathcal{R}, \xi) = k(\xi, \mathcal{R})$$

hat. Wir hatten definiert (II 22, 23)

$$(3) \quad V_x \cdot F = \int \chi(\mathcal{H}-E') (\mathcal{V}-1) (\chi \cdot F) d\tau_{\text{int}}$$

$$(4) \quad H_g \cdot F = \int \chi(\mathcal{H}-E') \chi \cdot F d\tau_{\text{int}}$$

Führen wir statt χ wieder $\mathcal{O}$ ein, so ergibt sich
auf Grund der Symmetrie-Eigenschaften der Funktion
 $F \cdot \chi$ mit $c = (2.4!.4!)^{-1} = (1152)^{-1}$

$$(5) \quad (V_x + H_g) \cdot F = c \int \chi \cdot (\mathcal{H}-E') \cdot \mathcal{O} \chi F d\tau_{\text{int}}$$

Wie in Abschnitt II nehmen wir auch hier an,
dass der Beitrag der kinetischen Energie der
Schwerpunktsbewegung des 8-Teilchensystems
von h bereits abgetrennt worden ist. Die Schwer-
punktskoordinate $\mathcal{R}$ und der zugehörige Impuls
 $\mathcal{P}$ treten dann in den Operatoren und Funktionen
der Gleichungen (1) bis (5) gar nicht auf. Wir
multiplizieren nun (5) mit

$$(6) \quad \delta(\mathcal{R}-\mathcal{R}') \cdot \delta(\mathcal{R}-\mathcal{R}')$$

und integrieren über den ganzen $\mathcal{R}'$ -und $\mathcal{R}$ -Raum,
was den Ausdruck (5) nicht ändert. Wir ersetzen
ferner $F(\mathcal{R})$ durch

$$(7) \quad \int \delta(\xi-\mathcal{R}) \cdot F(\mathcal{R}) d^3\tau_\xi$$

In dem so entstehenden Ausdruck können wir die Integrationsvariablen q_i umbenennen in q'_i und gleichzeitig $\mathcal{R}$ durch $\mathcal{R}'$ ersetzen, da nach der Integration über $\mathcal{R}'$ wegen (6) die ursprüngliche Abhängigkeit von $\mathcal{R}$ wiederhergestellt wird. Wir erhalten also

$$(8) (V_x + H_D) \cdot F = c \int \delta(\mathcal{R} - \mathcal{R}') \delta(\mathcal{R} - \mathcal{R}') \chi(\mathcal{R}', q'_1 \dots q'_s) \{ \mathcal{H}' - E' \} \times \\ \times \mathcal{O} \delta(\xi - \mathcal{R}') \chi(\mathcal{R}', q'_1 \dots q'_s) d\tau_{\mathcal{R}} d\tau_{\mathcal{R}'} d\tau_{\xi} \\ \times F(\xi) d\tau_{\xi}$$

Wir machen nun in den gestrichenen Grössen die gleiche Transformation, die (II 2) für die ungestrichenen angibt, und erhalten

$$(9) (V_x + H_D) \cdot F = c \int \delta(\mathcal{R} - \mathcal{R}') \delta(\mathcal{R} - \frac{v_1' + v_2' + v_3' + v_4' + v_5' + v_6' - v_7' - v_8'}{4}) \cdot \chi(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_8) \times \\ \times \{ \mathcal{H}' - E' \} \cdot \mathcal{O} \delta(\xi - \frac{v_1' + v_2' + v_3' + v_4' - v_5' - v_6' - v_7' - v_8'}{4}) \chi(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_8) \times \\ \times d\tau_{\bar{v}_1} \dots d\tau_{\bar{v}_8} \times F(\xi) d\tau_{\xi}$$

Eine Permutation der Integrationsvariablen ändert am Ergebnis nichts, und wir können schreiben, da $(\mathcal{H}' - E') \cdot (\mathcal{O} \cdot \chi \cdot \delta)$ antisymmetrisch in allen Teilchen ist

$$(10) (V_x + H_D) \cdot F = c \int \delta(\mathcal{R} - \frac{v_1' + v_2' + v_3' + v_4' + v_5' + v_6' + v_7' + v_8'}{8}) \text{sgn } p_{\mu} \cdot \{ p_{\mu} \cdot \delta(\mathcal{R} - \dots) \} \times \\ \times \chi(\bar{v}_i) \{ \mathcal{H}' - E' \} \mathcal{O} \cdot \delta(\xi - \dots) \cdot \chi(\bar{v}_i) d\tau_{\bar{v}_1} \dots d\tau_{\bar{v}_8} \times \\ \times F(\xi) d\tau_{\xi}$$

und erhalten weiter

$$(11) (V_x + H_D) \cdot F = \frac{c}{8!} \sum_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{8!} \text{sgn}(p_{\mu} p_{\nu}) \int \{ p_{\mu} \cdot \delta(\mathcal{R} - \dots) \} \chi(\bar{v}_i) \{ \mathcal{H}' - E' \} \times \\ \times \{ p_{\nu} \cdot \delta(\xi - \dots) \} \chi(\bar{v}_i) \{ \delta(\mathcal{R} - \dots) \} d\tau_{\bar{v}_1} \dots d\tau_{\bar{v}_8} \\ \times F(\xi) d\tau_{\xi}$$

Entsprechend ergibt sich für H_D

$$(12) H_D F = \frac{c}{8!} \sum_{\mu=1}^{8!} \int \{ p_{\mu} \cdot \delta(\mathcal{R} - \dots) \} \chi(\bar{v}_i) \{ \mathcal{H}' - E' \} \{ p_{\mu} \cdot \delta(\xi - \dots) \} \chi(\bar{v}_i) \times \\ \times \delta(\mathcal{R} - \dots) d\tau_{\bar{v}_1} \dots d\tau_{\bar{v}_8} \times F(\xi) d\tau_{\xi}$$

Es gilt also

$$(13) \quad V_x \cdot F = \frac{c}{g!} \sum_{\nu, \mu \neq \nu}^{g!} \text{sgn}(p_\mu p_\nu) \int \{p_\mu \delta(x \dots) \chi\} (\mathcal{H}' - E') \{p_\nu \delta(\xi \dots) \chi\} \times \\ \times \delta(x \dots) d\tau_1' \dots d\tau_g' \times F(\xi) d\tau_\xi$$

Der Hamiltonoperator H ist hermitesch, wir können ihn daher "abwälzen" und erhalten, da H weder noch enthält

$$(14) \quad V_x \cdot F = \frac{c}{g!} \sum_{\nu, \mu \neq \nu}^{g!} \text{sgn}(p_\mu p_\nu) \int [(\mathcal{H}' - E') \{p_\mu \delta(x \dots) \chi\}] \{p_\nu \delta(\xi \dots) \chi\} \times \\ \times \delta(x \dots) d\tau_1' \dots d\tau_g' \times F(\xi) d\tau_\xi$$

(14) geht aus (13) durch Vertauschung von x und ξ hervor. Definieren wir nunmehr

$$(15) \quad K(x, \xi) = \frac{c}{g!} \sum_{\lambda, g \neq \lambda}^{g!} \text{sgn}(p_g p_\lambda) \int \{p_g \delta(x \dots) \chi(\bar{v}_i')\} (\mathcal{H}' - E') \times \\ \times \{p_\lambda \delta(\xi \dots) \chi(\bar{v}_i')\} \delta(x \dots) \times \\ \times d\tau_1' \dots d\tau_g'$$

so erhalten wir das gewünschte Resultat (1) und (2).

Anhang III. Bemerkungen zum Mehrteilchenproblem

Den Ausgangspunkt für die Untersuchung der Eigenschaften eines Systems aus A Nukleonen bildet die Schrödingergleichung

$$(1) \quad \mathcal{H} \psi = E \psi (\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_A)$$

Darin ist $\mathcal{H}$ der Hamiltonoperator:

$$(2) \quad \mathcal{H} = - \frac{\hbar^2}{2M} \sum_{i=1}^A \Delta_i + V(\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_A)$$

Einer Berechnung der Funktionen ψ aus dieser Gleichung stehen mathematische Schwierigkeiten entgegen. Ausser bei besonders einfachen, in der Natur nicht realisierten Potentials $V(\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_A)$ zwischen den einzelnen Teilchen, ist eine Lösung der Gleichung (1) nicht möglich. Darüberhinaus ist aber auch die genaue Form des Potentials V noch unbekannt.

Der Anteil der Zweikörperkräfte

$$(3) \quad \frac{1}{2} \sum_{i,k \neq 1} V(\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_k) = \frac{1}{2} \sum_{i,k \neq 1} \sum_j f_j(s_i, t_i, s_k, t_k) v_j(r_i - r_k)$$

wobei f_j die bekannten Austauschoperatoren bedeuten, ist sicher ein wesentlicher Bestandteil der Wechselwirkung $V(\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_A)$. Ausserdem enthält V noch Spin-Bahn-Kopplungs- und Tensorkräfte, Coulombkräfte zwischen den Protonen und schliesslich Mehrkörperkräfte, deren Eigenschaften noch völlig unbekannt sind.

Die Ortsabhängigkeit $v_j(r_i - r_k)$ der Zweikörperkräfte wurde bisher als monotone Funktion von $|r_i - r_k|$ angesehen. Die neueren Zwei-Nukleonen-Streuexperimente haben jedoch gezeigt, dass die Funktionen $v_j(r_i - r_k)$ einen "Hardcore" enthalten

$$(4) \quad v_j(x) = \infty \quad \text{für } x \leq a$$

worin a ungefähr

$$(5) \quad a \approx 0,4 f$$

ist. Ein Hardcore-Ansatz wird auch aus Gründen der Absättigung der Kernkräfte verlangt, da die Sättigungsbedingungen für die Koeffizienten der Austauschoperatoren unverträglich sind mit den Ergebnissen der Zwei-Nukleonen-Streuung.

Unter den zahlreichen Methoden, die ersonnen wurden, um die Gleichung (1) mit dem Ansatz (3) wenigstens näherungsweise zu lösen, nimmt das Ritzsche Variationsverfahren infolge seiner bequemen Anwendbarkeit einen besonderen Platz ein. Die hierfür erforderlichen Näherungswellenfunktionen wurden bisher nach dem Schalenmodell konstruiert. Nach Einführung der Hardcores in die Zweikörperkräfte kann man diesen Weg nicht mehr unmittelbar beschreiten, da sich für sämtliche Erwartungswerte der potentiellen Energie Unendlich ergibt. Es müssen daher wenigstens die Korrelationen zwischen je zwei Nukleonen berücksichtigt werden. Das führt zu dem "independent-pair-model" (Br 58).

Die Rechnungen in diesem Modell sind aber sehr viel schwieriger und umfangreicher als nach dem Schalenmodell und liegen erst für einige Spezialfälle vor.

Um das Schalenmodell auch weiterhin anwenden zu können, wurde der Begriff der effektiven Zweikörperkräfte eingeführt. Man versteht darunter Zweikörperkräfte, die weitgehend den wirklichen Zweikörperkräften (3) äquivalent sind, aber keine Hardcores enthalten. Ihre Berechnung kann etwa nach der Brücknerschen Theorie erfolgen (Be 56). In der Praxis genügt statt dessen häufig folgendes Verfahren (Wi 58). Man konstruiert ein monotonen Potential, das die Zwei-Nukleonen-Streudaten bis

etwa 60 MeV wiedergibt und erzwingt die Sättigung im Rahmen des Schalenmodells durch geeignete Wahl von Konstanten in den Wellenfunktionen, z. B. der Konstanten α in (II 35). Auf eine Begründung dieses Verfahrens wollen wir hier nicht näher eingehen.

Diese Bemerkungen zum kernphysikalischen Mehrteilchenproblem sollen nur zeigen, dass die Behandlung nach dem Schalenmodell, wie sie in den nächsten Abschnitten des Anhangs für den Kern Be 8 gegeben wird, wohl zahlreichen Einwänden ausgesetzt ist, aber dennoch eine konsistente und sehr brauchbare Methode darstellt, das Mehrteilchenproblem zu behandeln und Wellenfunktionen für zahlreiche Zustände der Atomkerne anzugeben. (vgl. (El 57) und die dort zitierten Arbeiten).

Anhang IV. Kurzgefasste Behandlung des Schalenmodells

Wir referieren jetzt kurz die Behandlung des Schalenmodells und geben anschliessend (im Anhang V) die Anwendung auf den uns interessierenden Kern Be 8.

Im Schalenmodell ersetzt man den Hamiltonoperator (I 1 bzw. Anh. III 1) durch

$$(1) \quad \mathcal{H}_0 = - \frac{\hbar^2}{2M} \sum_{i=1}^A \Delta_i + \sum V(\vec{r}_i)$$

Die Schrödingergleichung

$$(2) \quad \mathcal{H}_0 \phi = \epsilon \phi(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_A)$$

erlaubt dann den Separationsansatz

$$(3) \quad \phi_0 = \prod_{j=1}^A \varphi_{\alpha_j}(\vec{r}_j)$$

und zerfällt in A Gleichungen für Funktionen jeweils nur einer Koordinate $\vec{r}_j$.

$$(4) \quad \left\{ - \frac{\hbar^2}{2M} \Delta + V(\vec{r}) \right\} \varphi_{\alpha}(\vec{r}) = \epsilon_{\alpha} \varphi_{\alpha}(\vec{r})$$

Für ϵ ergibt sich

$$(5) \quad \epsilon = \sum_{j=1}^A \epsilon_{\alpha_j}$$

Das Einteilchenpotential $V(\vec{r}_j)$ bedeutet physikalisch einen Mittelwert des von allen übrigen Teilchen auf das j-te Nukleon ausgeübten Potentials.

ϵ hat nur formale Bedeutung und gibt nicht einmal näherungsweise die Gesamtenergie an, da bei der Berechnung von ϵ die Beiträge der potentiellen Energie doppelt gezählt werden.

Die Eigenfunktionen der Gleichung (2) bilden ein vollständiges Orthogonalsystem, nach dem die Lösungen der Gleichung (Anh. III 1) entwickelt werden können.

$$(6) \quad \psi(\bar{\pi}_1 \dots \bar{\pi}_A) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} c_{\lambda} \phi_{\lambda}(\bar{\pi}_1 \dots \bar{\pi}_A)$$

Die Entwicklungskoeffizienten c_{λ} hängen von der Wahl des Einteilchenpotentials $V(\bar{\pi})$ ab. Man wird V möglichst so wählen, dass man mit wenigen Gliedern der Entwicklung bereits eine gute Näherung für die Wellenfunktion $\psi(\bar{\pi}_1 \dots \bar{\pi}_A)$ der Gleichung (Anh. III 1) erhält.

Infolge der meist hohen Entartung der Energieniveaus der Gleichung (2) genügt es in fast allen Fällen zur Berechnung des Grundzustandes und der niederen Anregungszustände der Gleichung (Anh. III 1) in der Entwicklung (6) nur diejenigen Eigenfunktionen zu berücksichtigen, die zum Grundzustand von (2) gehören.

Die Zahl der Glieder in der Entwicklung (6) ist in vielen Fällen auch dann noch recht gross, und es erhebt sich die Frage, wie man die Wellenfunktion vereinfachen kann. In allen Fällen, in denen entartete Niveaus auftreten, ist es zweckmässig, die Eigenfunktionen durch weitere Quantenzahlen zu klassifizieren. Im Rahmen des Schalenmodells verwendet man zwei Arten solcher zusätzlicher Quantenzahlen:

1. "Gute Quantenzahlen" sind Eigenwerte von Operatoren, die in Strenge mit H der Gl. (Anh. III 1) vertauschbar sind. Wir nehmen an, dass H_0 (1) so gewählt sei, dass diese Operatoren - ausser dem des Gesamtimpulses - auch mit H_0 vertauschbar sind.
2. "Bedingte Quantenzahlen" gehören zu Operatoren, die zwar in Strenge mit H_0 aber nur näherungsweise mit H vertauschbar sind.

Zur ersten Art gehören der Drehimpuls J , seine z -Komponente J_z , die 3. Komponente des Isotopenspins T_3 und die Parität π ; zur zweiten der Gesamtisotopenspin T und der Symmetriecharakter Σ

des Ortsanteils der Wellenfunktion und der des Spin- und Ladungsspinanteils. Zur zweiten Art gehören ferner die Gesamtdrehimpulse j_i der einzelnen Nukleonen, die im Falle der jj -Kopplung eine wichtige Rolle spielen, und falls $V(\vec{r})$ keine Spin-Bahnkopplung enthält, der Gesamtbahndrehimpuls L und der Gesamtspindrehimpuls S (L - S -Kopplung).

Wir wollen noch ein paar Worte zum Begriff des Symmetriecharakters sagen. Infolge der Ununterscheidbarkeit der Teilchen sind die Lösungen der Gleichungen (Anh. III, 1) und (2) im allgemeinen sehr stark entartet. Die mit der Vertauschung der einzelnen Teilchenkoordinaten zusammenhängende Entartung bezeichnet man als Resonanzentartung. Da sämtliche Observablen symmetrisch in den Teilchenkoordinaten sind, haben nur solche Wellenfunktionen Sinn, die sich bei Permutationen der Teilchen nach irreduziblen Darstellungen der Permutationsgruppe transformieren. Doch auch diese kommen nicht sämtlich in der Natur vor, sondern nur die total symmetrischen für Teilchen mit ganzzahligem Spin und die total antisymmetrischen für Teilchen mit halbzahligem Spin. Für Nukleonen liegt der letzte Fall vor.

Diese Darlegungen beziehen sich auf die Gesamtwellenfunktion. Teile der Wellenfunktion können aber auch andere Symmetriecharaktere haben, wenn nur der Rest den dualen Symmetriecharakter hat, und auf diese Weise den richtigen Symmetriecharakter der Gesamtwellenfunktion liefert.

Die Ortsanteile der Wellenfunktionen, die zu verschiedenen irreduziblen Darstellungen der Permutationsgruppe gehören, unterscheiden sich hauptsächlich in der Zahl der Teilchenpaare, in denen die Wellenfunktion symmetrisch ist. Andererseits sind

die Kernkräfte, die wir im Hamiltonoperator H zu berücksichtigen haben vorwiegend attraktiv. (Hu 37). Daher hängt der Erwartungswert der potentiellen Energie stark vom Symmetriecharakter des Ortsanteils der Wellenfunktion ab: Je grösser die Zahl der Teilchenpaare ist, in denen der Ortsanteil symmetrisch ist, desto niedriger wird der Erwartungswert der potentiellen Energie. Er ist am niedrigsten bei möglichst hoher Symmetrie des Ortsanteils.

Da es nur 4 verschiedene Spin- und Ladungsspinfunktionen gibt, der Spin- und Ladungsspinanteil der Wellenfunktion daher in höchstens 4 Teilchen gleichzeitig antisymmetrisch sein kann, kann der Ortsanteil höchstens in 4 Teilchen zugleich symmetrisch sein.

Die Situation ist hier ähnlich wie bei der Behandlung der Spektren der Atomhülle. Auch dort wurde der Symmetriecharakter des Orts- und Spinteils der Wellenfunktion zur Klassifikation der Spektren herangezogen. Allerdings hängt dort der Symmetriecharakter des Spinteils nur vom Gesamtspin der Elektronenhülle ab. Da die Gesamtwellenfunktion ebenfalls total antisymmetrisch ist, ist dann auch der Symmetriecharakter des Ortsanteiles festgelegt. Da die Wechselwirkung der Elektronen repulsiv ist, liegen die Energiewerte um so niedriger, je geringer die Zahl der Teilchen ist, in denen der Ortsanteil der Wellenfunktion symmetrisch ist, d.h. je grösser die Spinquantenzahl unter sonst gleichen Bedingungen ist.

Nun kehren wir zum Schalenmodell für den Atomkern zurück. Wir führen nunmehr im Raume der Linearkombinationen der ϕ_λ der Gl. (6) neue Basisfunktionen χ_λ ein, die jeweils zu definierten Werten von J , J_z , T , T_z und Z gehören. Im allgemeinen gehören zu einem Satz dieser Quantenzahlen noch mehrere Funktionen, die durch den Index unterschieden werden.

$$(7) \quad \chi_2 (J, J_2, T, T_3, \Sigma; \sigma_2 \dots \sigma_{12})$$

Die im Ansatz

$$(8) \quad \chi (J, J_2, T, T_3, \Sigma) = \sum_a \alpha_a \chi_a (J, J_2, T, T_3, \Sigma)$$

noch unbestimmt bleibenden Koeffizienten werden nach dem Ritzschen Variationsverfahren berechnet. Dazu bilden wir den Erwartungswert der Energie

$$(9) \quad E = \frac{(X, HX)}{(X, X)}$$

mit dem Hamiltonoperator (Anh. III 2) und variieren die Koeffizienten α_a so, dass sich für E ein Minimum ergibt.

Die so gewonnenen Energiewerte hängen von den Quantenzahlen (J, J_2, T, T_3, Σ) ab und bilden Näherungswerte für die Eigenwerte der Gl. (Anh. III 1). Ebenso stellen die zugehörigen Wellenfunktionen (8) Näherungen für die Lösungen der Gl. (Anh. III 1) dar. Höher angeregte Niveaus zu den angegebenen Quantenzahlen erhält man nach dem Ritzschen Variationsprinzip unter Berücksichtigung der Orthogonalität auf den tieferliegenden Zuständen als Nebenbedingung. Korrekturen, die erforderlich sind, weil der Symmetriecharakter keine gute Quantenzahl ist, lassen sich gegebenenfalls störungstheoretisch berechnen.

Nun ein paar Worte zur Bestimmung des Einteilchenpotentials $V(\vec{r})$. Das experimentelle Material, das unter anderem die Spins und Parität der Grundzustände der Atomkerne, ihre magnetischen und Quadrupolmomente und die magischen Zahlen umfasst, lässt sich besonders gut wiedergeben mit der folgenden Reihenfolge der Einteilchensustände (Je 55):

$$(10) \quad 1s_{1/2}, 1p_{3/2}, 1p_{1/2}, 1d_{5/2}, 2s_{1/2}, 1d_{3/2} \dots$$

Darin geben die Symbole n_l , die Radialquantenzahl n , die Bahndrehimpulsquantenzahl l (in spektroskopischer Bezeichnung) und die Gesamtdrehimpulsquantenzahl j an. Diese Reihenfolge (10) legt die analytische Form des Potentials $V(\bar{r})$ in (4) keineswegs eindeutig fest. Sie wird z. B. wiedergegeben durch ein Oszillatorpotential bei leichten Kernen (bis etwa $A = 50$) und ein kugelsymmetrisches Kastenpotential bei schwereren Kernen. In beiden Fällen ist eine Spin-Bahn-Kopplung erforderlich, die eine mit l wachsende Aufspaltung der durch den Bahndrehimpuls gekennzeichneten Einteilchen-Niveaus bewirkt. Die Konstanten, die die Weite des Potentials bestimmen, müssen so gewählt werden, dass die Funktionen ϕ_λ in (6) den Kernradius richtig beschreiben.

Die Spin-Bahn-Kopplung ist bei ~~schweren~~ Kernen besonders wichtig, bei denen die Aufspaltung der Niveaus vergleichbar wird mit ihrem Abstand. Bei leichten Kernen dagegen spielt die Spin-Bahn-Kopplung in $V(\bar{r})$ nur dann eine Rolle, wenn man sich bei der Konstruktion der ϕ_λ (Gl. (6)) auf die Einteilchenfunktionen der Schalen $1s_{1/2}$, $1p_{3/2}$ beschränkt. Berücksichtigt man jedoch in den ϕ_λ die Einteilchenfunktionen der ganzen $1p$ -Schale, so ist die Mannigfaltigkeit der Funktionen ϕ_λ unabhängig davon, ob im Einteilchenpotential $V(\bar{r})$ eine Spin-Bahn-Kopplung vorkommt oder nicht.

Wir werden daher für die Berechnung der Einteilchenfunktionen, aus denen wir die Wellenfunktion für den Be 8 Kern aufbauen, ein spinunabhängiges Potential

$$(11) \quad V(\bar{r}) = V(r)$$

voraussetzen, dessen Konstanten so gewählt sind, dass die Wellenfunktionen den Kernradius richtig beschreiben und dessen erstes angeregtes Niveau

ein lp-Zustand ist. Aus Gründen, die später erörtert werden, müssen wir uns allerdings bald auf ein Oszillatorpotential

$$(12) \quad V(r) = \frac{\hbar^2}{2M} q^2 r^2$$

beschränken. Darin ist M die Nukleonenmasse und

$$(13) \quad q \approx 0.36 \dots 0.47 \text{ f}^{-2}$$

Die Kreisfrequenz des Oszillators ω hängt mit q durch

$$(14) \quad \omega = \frac{\hbar q}{M}$$

zusammen. Die Ungenauigkeit in der Konstanten q liegt darin begründet, dass der Kernradius keine scharf definierte Grösse ist. Wir tragen nun (11) in (4) ein und können nach Einführung von Kugelkoordinaten den Winkelanteil und ausserdem den Spin- und Ladungsspinanteil der Einteilchenwellenfunktionen abtrennen:

$$(15) \quad \psi_\mu(\vec{r}) = \varphi_{n\ell m}(r) \cdot d_{\sigma\tau}(s, t)$$

$$(16) \quad \varphi_{n\ell m}(r) = r^\ell \chi_{\ell n}(r) \cdot Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)$$

Darin sind die $Y_{\ell m}$ Kugelfunktionen und μ fasst die verschiedenen Quantenzahlen zusammen:

- (17) n = Radialquantenzahl
 ℓ = Drehimpulsquantenzahl
 m = magnetische Quantenzahl
 σ = Spinqantenzahl
 τ = Ladungsquantenzahl

Für $\chi_{\ell n}(r)$ erhält man die Differentialgleichung

$$(18) \quad \frac{d^2}{dr^2} \chi_{\ell n} + \frac{2(\ell+1)}{r} \frac{d}{dr} \chi_{\ell n} + \frac{E - V}{\hbar^2} 2m \chi_{\ell n} = 0$$

Die Randbedingung $0 < \chi(0) < \infty$ und $\lim_{r \rightarrow \infty} \chi(r) = 0$ legen

die Eigenwerte ϵ_n fest. Die Eigenfunktionen für die 1s- und 1p-Schale sind:

$$\begin{aligned}
 (19) \quad \varphi_{100} &= \chi_{01}(r) \\
 \varphi_{11+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x+iy)\chi_{11}(r) = f_+ \chi_{11} \\
 \varphi_{110} &= z \cdot \chi_{11}(r) = f_0 \chi_{11} \\
 \varphi_{11-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x-iy)\chi_{11}(r) = f_- \chi_{11}
 \end{aligned}$$

Die Funktionen $\varphi_{n,l,m}$ seien normiert:

$$(20) \quad \int \varphi_{nlm}^* \varphi_{nlm} d\tau = 1$$

Für das Oszillatorpotential (12) ergibt sich speziell:

$$\begin{aligned}
 (21) \quad \chi_{01} &= c_0 e^{-\frac{q}{2}r^2} \\
 \chi_{11} &= c_1 e^{-\frac{q}{2}r^2}
 \end{aligned}$$

Darin bedeuten die c_i ebenso wie die c_i' , c_i'' und c_i''' in den folgenden Gleichungen Normierungskonstanten. Für spätere Anwendungen wollen wir noch die Funktionen

$$\begin{aligned}
 (22) \quad \varphi_{200} &= c_0' \left(1 - \frac{2}{3}qr^2\right) e^{-\frac{q}{2}r^2} \\
 \varphi_{12m} &= c_2' r^2 e^{-\frac{q}{2}r^2} y_{2m}(\vartheta, \varphi)
 \end{aligned}$$

angeben, die zur 2., und

$$\begin{aligned}
 (23) \quad \varphi_{300} &= c_0'' \left(1 - \frac{4}{3}r^2 + \frac{4}{15}q^2 r^4\right) e^{-\frac{q}{2}r^2} \\
 \varphi_{22m} &= c_2'' r^2 \left(1 - \frac{2}{7}r^2\right) e^{-\frac{q}{2}r^2} y_{2m}(\vartheta, \varphi) \\
 \varphi_{14m} &= c_4'' r^4 e^{-\frac{q}{2}r^2} y_{4m}(\vartheta, \varphi)
 \end{aligned}$$

die zur 4. Anregungsstufe des Oszillatorpotentials gehören und die die miteinander entarteten 3s-, 2d-,

lg-Schalen bilden. Für $m = 0$ haben die Kugelfunktionen $Y_{l,m}$ folgende Gestalt:

$$(24) \quad r^2 Y_{2,0} = C_2''' (3z^2 - r^2)$$

$$r^4 Y_{4,0} = C_4''' (35z^4 - 30z^2 r^2 + 3r^4)$$

Anhang V. Schalenmodellfunktionen für den Kern Be 8

Wir wenden uns nun dem Kern Be 8 zu. Von den 8 Nukleonen dieses Kern füllen 4, die sich in den Ladungs- und Spinfunktionen unterscheiden die ls-Schale. Die restlichen 4, die sich ebenfalls in den Ladungs- und Spinfunktionen unterscheiden, verteilen sich auf die lp-Schale, die insgesamt 12 Teilchen aufnehmen kann. Es lassen sich in diesem Falle insgesamt 81 miteinander entartete und aufeinander orthogonale Funktionen ϕ_λ bilden.

Zur Klassifizierung dieser Funktionen benutzen wir die Quantenzahlen J , J_z und $\sum$. Zunächst zum Symmetriecharakter $\sum$! Der höchstmögliche Grad an Symmetrie des Ortsanteils der Wellenfunktion wird erreicht, wenn dieser ausser in den 4 Teilchen der ls-Schale auch in den 4 Teilchen der lp-Schale symmetrisch ist; dann sind die zugehörigen Spin-Ladungsfunktionen in den beiden Quadrupeln antisymmetrisch, und es ergibt sich für die Quantenzahlen des

$$(1) \quad \begin{array}{ll} \text{Spins} & S = 0 \\ & S_z = 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{Ladungsspins} & T = 0 \\ & T_z = 0 \end{array}$$

Der Gesamtdrehimpuls ist daher durch den Bahndrehimpuls L gegeben und dieser setzt sich zusammen aus den Bahndrehimpulsen der Teilchen der lp-Schale (Die ls-Schale liefert keine Beiträge):

$$(2) \quad \begin{aligned} J &= L = \sum_{k=1}^8 \vec{\ell}_k \\ J_z &= L_z = \sum_{k=1}^8 m_k \end{aligned}$$

Durch den Prozess der Symmetrisierung in den Teilchen der ls- und lp-Schale reduziert sich die Zahl der auf einander orthogonalen Funktionen ϕ_λ auf 15, die sich in folgender Weise auf die einzelnen Quantenzahlen J_z verteilen:

(Tabelle 6)

J_z	Zahl der
± 4	je 1
± 3	" 1
± 2	" 2
± 1	" 2
0	3

insgesamt: 15

Daraus sieht man bereits, dass $L (= J)$ die Werte $L = 0, 2, 4$ je einmal annehmen kann, und wir müssen jetzt noch einen Weg angeben, wie man die zu den verschiedenen L gehörenden Funktionen aufstellen kann.

Wir betrachten nun die zu $L_z = 0 (= J_z)$ gehörenden Funktionen ϕ_λ . Für $L_z \neq 0$ lassen sich die Betrachtungen ganz genauso durchführen. Die in vier Teilchen total antisymmetrische Spin- und Ladungsspinfunktion bezeichnen wir wie in (II 16) mit

$$(3) \quad g(1234) = g(s_1, t_1; s_2, t_2; s_3, t_3; s_4, t_4)$$

Bezeichnen wir weiter mit S_{1234} den Symmetrisierungsoperator für die Ortskoordinaten (r_1, r_2, r_3, r_4) , so können wir unter Benutzung des Operators (I 5) schreiben

$$\begin{aligned} (4) \quad \phi_1 &= \alpha \{ F_0(1234) F_7(5678) S_{5678} [f_+(v_5) f_+(v_6) f_-(v_7) f_-(v_8)] \} \\ \phi_2 &= \alpha \{ F_0(1234) F_7(5678) S_{5678} [f_+(v_5) f_0(v_6) f_0(v_7) f_+(v_8)] \} \\ \phi_3 &= \alpha \{ F_0(1234) F_7(5678) S_{5678} [f_0(v_5) f_0(v_6) f_0(v_7) f_0(v_8)] \} \end{aligned}$$

Darin bedeuten

$$\begin{aligned} (5) \quad F_0(1234) &= \chi_{01}(r_1) \cdot \chi_{01}(r_2) \cdot \chi_{01}(r_3) \cdot \chi_{01}(r_4) g(1234) \\ F_7(5678) &= \chi_{11}(v_5) \cdot \chi_{11}(v_6) \cdot \chi_{11}(v_7) \cdot \chi_{11}(v_8) g(5678) \end{aligned}$$

Die Bestimmung der Koeffizienten χ_λ in

$$(6) \quad \chi(L, L_2=0) = \sum_{\lambda=1}^3 \chi_{\lambda}(L) \phi_{\lambda} \quad J = L = 0, 2, 4$$

(vgl. Anh. IV 7) kann nun durch Lösung des Eigenwertproblems

$$(7) \quad \mathcal{L}^2 \chi = L(L+1) \cdot \chi(L, L_2=0)$$

oder ein damit äquivalentes Verfahren vorgenommen werden.

Wie man durch Betrachtung der Translationsinvarianz der Hamiltonoperatoren ersehen kann, gestattet der exakte Hamilton-Operator $\mathcal{H}$ (Anh. III 2) eine Separation der Schwerpunktskoordinate

$$(8) \quad \mathcal{H} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A \pi_i^2$$

was für den Hamiltonoperator H_0 (Anh. IV 1) nur in Ausnahmefällen gilt. Ein solcher Ausnahmefall liegt für das Oszillatorpotential (Anh. IV 12) vor. Wir erwarten daher, dass sich für dieses Potential die Funktionen (4) erheblich vereinfachen. Infolge der Relation (Anh. IV 21) sind die Funktionen F_i in (5) bis auf einen konstanten Faktor einander gleich, was ebenfalls eine Vereinfachung gegenüber dem allgemeinen Fall bedeutet. Wir wollen uns daher von jetzt an auf das Oszillatorpotential (Anh. IV 12) beschränken.

Wir führen hier wieder die Koordinaten-Transformation (II 1 und 2) durch. Ähnliche Transformationen für das Oszillatorpotential werden von Wildermuth (Wi 58) und Skyrme (Sk 55) diskutiert. Wir erhalten dann für die potentielle Energie $V(r)$ (Anh. IV 12)

$$(9) \quad \sum_{i=1}^8 V(u_i) = \frac{\hbar^2}{2M} \left\{ 8x^2 + 2x^2 + \frac{3}{4} \beta_1^2 + \frac{2}{3} \beta_2^2 + \frac{1}{2} \beta_3^2 + \frac{3}{4} \beta_4^2 + \frac{2}{3} \beta_5^2 + \frac{1}{2} \beta_6^2 \right\}$$

und für die kinetische Energie des Hamiltonoperators H_0

$$(10) \quad T = -\frac{\hbar^2}{2M} \left\{ \frac{1}{8} \Delta_x + \frac{1}{2} \Delta_x + \frac{4}{3} \Delta_{\beta_1} + \frac{3}{2} \Delta_{\beta_2} + 2 \Delta_{\beta_3} + \frac{4}{3} \Delta_{\beta_4} + \frac{3}{2} \Delta_{\beta_5} + 2 \Delta_{\beta_6} \right\}$$

Die Schrödingergleichung (Anh. IV 2) geht dann über in

$$(11) \quad \mathcal{H}_0 \cdot \phi(\rho_1, \dots, \rho_6, \mathcal{R}, \mathcal{R}) = \epsilon \phi$$

und lässt sich in diesen Koordinaten ebenfalls durch einen Produktansatz lösen. Der Grundzustand von (Anh. IV 2), der durch die Konfiguration $(1s)^4(1p)^4$ beschrieben wird, gehört zum Energie-Eigenwert

$$(12) \quad \epsilon_0 = 4 \left(\frac{3}{2} \hbar \omega + \frac{5}{2} \hbar \omega \right) = 16 \hbar \omega$$

Denn jedes $1s$ -Teilchen trägt $3/2 \hbar \omega$ und jedes $1p$ -Teilchen $5/2 \hbar \omega$ zu ϵ_0 bei. Darin ist ω die Kreisfrequenz des Oszillators (Anh. IV 14). Wir nehmen an, dass die Bewegung in den inneren Koordinaten ρ_i und der Schwerpunktskoordinate $\mathcal{R}$ durch $1s$ -Funktionen beschrieben wird. Wird die Relativbewegung der beiden durch die Teilchen 1...4 und 5...8 gebildeten Cluster durch eine Wellenfunktion der N -ten Anregungsstufe des Oszillators beschrieben, so gehört die Gesamtwellenfunktion zum Energie-Eigenwert

$$(13) \quad \epsilon = (N+12) \hbar \omega$$

Wegen $\epsilon \geq 16$ (vgl. (12)) ergibt sich $N \geq 4$. Mit anderen Worten: Alle Funktionen, die zu Anregungsstufen mit $N < 4$ gehören, verschwinden bei der Antisymmetrierung identisch. Diese Aussage lässt sich auch durch ähnliche Überlegungen wie in Abschnitt III gewinnen.

Die 4. Anregungsstufe enthält je eine Funktion zum Drehimpuls $L = 0, 2, 4$ (vgl. Anh. IV 23). Die Lösungen von (11) lassen sich dann unter Benutzung der Abkürzung

$$(14) \quad \chi = \sum_{i=1}^8 \psi_i^2 = 8 \mathcal{R}^2 + 2 \mathcal{R}^2 + \frac{3}{4} \rho_1^2 + \frac{2}{3} \rho_2^2 + \frac{1}{2} \rho_3^2 + \frac{3}{4} \rho_4^2 + \frac{2}{3} \rho_5^2 + \frac{1}{2} \rho_6^2$$

$$\begin{aligned}
 (15) \quad \phi'(N=4, L=0) &= c_0'' \left(1 - \frac{8}{3} q x^2 + \frac{16}{15} q^2 x^4\right) e^{-\frac{q}{2} x} \\
 \phi'(N=4, L=2) &= 2c_2'' \cdot x^2 \cdot \left(1 - \frac{4}{7} q x^2\right) \cdot e^{-\frac{q}{2} x} y_{2m}(\varphi) \\
 \phi'(N=4, L=4) &= 4c_4'' \cdot x^4 \cdot e^{-\frac{q}{2} x} \cdot y_{4m}(\varphi)
 \end{aligned}$$

In den Exponentialfunktionen kehren wir zu den Koordinaten q $i = 1 \dots 8$ zurück und erkennen, dass dieser Ausdruck symmetrisch in den 8 Teilchen ist. Die drei Funktionen (15) sind nun

1. aufeinander orthogonal und
2. symmetrisch in den Teilchen 1...4 und 5...8.

Da es nach unseren früheren Überlegungen (Tabelle 6) höchstens drei solche Funktionen gibt, sehen wir, dass die durch Multiplikation mit den Spin- und Ladungsspinfunktionen und anschließende Antisymmetrisierung aus (15) hervorgehenden Funktionen:

$$(16) \quad \phi(N=4, L) = \alpha \{ \phi'(N=4, L) g(1234) g(5678) \}$$

genau die Funktionen sind, die durch das Eigenwertproblem (7) konstruiert werden sollten.

Verweilen wir noch einen Augenblick bei den Oszillatorfunktionen! Wir hatten gesehen, dass Funktionen zu niedrigeren Anregungsstufen N der Relativbewegung bei der Antisymmetrisierung verschwinden müssen. Das bedeutet aber, dass

$$\begin{aligned}
 (17) \quad \phi(N=2, L=0) &= \alpha \{ c_0' \left(1 - \frac{4}{3} q x^2\right) e^{-\frac{q}{2} x} g(1234) g(5678) \} = 0 \\
 \phi(N=2, L=2) &= 2\alpha \{ c_2' x^2 e^{-\frac{q}{2} x} y_{2m} g(1234) g(5678) \} = 0 \\
 \phi(N=0, L=0) &= \alpha \{ c_0 e^{-\frac{q}{2} x} g(1234) g(5678) \} = 0
 \end{aligned}$$

Kombinieren wir die Gleichungen (16) und (17), so folgt

$$\begin{aligned}
 (18) \quad \phi(N=4, L=0) &= a \{ c_0 x^4 e^{-\frac{q}{2}x} g(1234) g(5678) \} \\
 \phi(N=4, L=2) &= a \{ c_2 x^4 e^{-\frac{q}{2}x} g(1234) g(5678) y_{2,m} \} \\
 \phi(N=4, L=4) &= a \{ c_4 x^4 e^{-\frac{q}{2}x} g(1234) g(5678) y_{4,m} \}
 \end{aligned}$$

mit X aus (14). Darin bedeuten

$$(19) \quad e^{-4q x^2}$$

die Schwerpunktsbewegung des 8-Teilchensystems,

$$(20) \quad e^{-\frac{q}{2}(\frac{3}{4}p_1^2 + \frac{2}{3}p_2^2 + \frac{1}{2}p_3^2)} g(1234) \times e^{-\frac{q}{2}(\frac{3}{4}p_4^2 + \frac{2}{3}p_5^2 + \frac{1}{2}p_6^2)} g(5678)$$

die innere Bewegung der beiden α -Cluster und

$$\begin{aligned}
 (21) \quad \psi_0 &= c_0 x^4 e^{-q x^2} \\
 \psi_2 &= c_2 x^4 e^{-q x^2} y_{2,m} \\
 \psi_4 &= c_4 x^4 e^{-q x^2} y_{4,m}
 \end{aligned}$$

ihre Relativbewegung in den Zuständen $L = 0, 2, 4$.

Das Resultat (18) lässt sich auch mit Hilfe der Überlegungen des Abschnitts III gewinnen.

Anhang VI. Berechnung der Energiewerte im Rahmen des Schalenmodells

Wir wollen nun auf die Berechnung der Energiewerte E_L für den Kern Be 8 eingehen (vgl. (IV 3) und Fig. 1).

Der Ausgangspunkt hierfür ist die Gl. (Anh. IV 9), in der H den exakten Hamiltonoperator (Anh. III 2) bedeutet. Wie wir bereits im Anhang III erläutert haben, müssen wir für die gegenseitige Wechselwirkung der einzelnen Nukleonen die effektiven Zweikörperkräfte verwenden.

Der Erwartungswert der kinetischen Energie hängt nur ab von der Zahl der Teilchen in den einzelnen Schalen und ist daher für die uns interessierenden Zustände gleich. Wir bezeichnen ihn mit

$$(1) \quad \langle T \rangle = \sum_{i=1}^8 \int \varphi_{\alpha_i}^*(v) \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \right) \Delta \varphi_{\alpha_i}(v) dv$$

Der Erwartungswert der potentiellen Energie setzt sich zusammen aus Summanden, die die Integrale

$$(2) \quad S = \int \chi_{01}^2(r_1) \chi_{01}^2(r_2) v(r_{12}) d\tau_1 d\tau_2$$

$$U = 3 \int \chi_{01}(r_1) \chi_{01}(r_2) \chi_{11}(r_1) \chi_{11}(r_2) v(r_{12}) r_1 r_2 d\tau_1 d\tau_2$$

$$W = \int \chi_{01}^2(r_1) \chi_{11}^2(r_2) v(r_{12}) r_2^2 d\tau_1 d\tau_2$$

$$K = 9 \int \chi_{11}^2(r_1) \chi_{11}^2(r_2) v(r_{12}) r_1 r_2 d\tau_1 d\tau_2$$

$$L' = 9 \int \chi_{11}^2(r_1) \chi_{11}^2(r_2) v(r_{12}) r_1^2 r_2^2 d\tau_1 d\tau_2$$

enthalten. Die darin vorkommenden Funktionen sind in (Anh. IV 19) erklärt.

In (2) geben S die Wechselwirkung zwischen Teilchen der 1s-Schale, U und W die Wechselwirkung zwischen 1s- und 1p-Teilchen und K und L' die der 1p-Teil-

chen untereinander an. Alle 5 Integrale sind noch Funktionen der Parameter des Pauschalpotentials V von (Anh. IV 11).

Für die Zustände (Anh. V 18) des Kernes Beßergibt sich

$$(3) \quad E_0 = E' + 4sk$$

$$E_2 = E' + sk$$

$$E_4 = E' - 6sk$$

Darin ist

$$(4) \quad E' = \langle T \rangle + (6S + 12U + 6L)s + 16(W - U)$$

Bei der Herleitung des Resultates (3) haben wir den Ansatz

$$(5) \quad V(\vec{r}_i, \vec{r}_k) = \sum_j f_j(s_i t_i s_k t_k) v_j(r_i - r_k) \\ \cdot (a + b \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_k + c \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_k + d \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_k \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_k) v(r_{ik}) \\ r_{ik} = |\vec{r}_i - \vec{r}_k|$$

für die $V(\vec{r}_i, \vec{r}_k)$ der Gl. (Anh. III 3) benutzt und die Abkürzung eingeführt:

$$(6) \quad s = a - b - c - 3d$$

Das Ergebnis ist bereits von Feenberg (Fe 37) abgeleitet worden, und es lässt sich (3) auch so formulieren:

$$(7) \quad \frac{E_4 - E_0}{E_2 - E_0} = \frac{10}{3}$$

Dieses Verhältnis stimmt gut mit den experimentellen Daten überein (vgl. Fig. 1).

Die Gleichungen (1) bis (7) gelten noch allgemein für ein beliebiges Schalenmodellpotential. Für die

quantitative Auswertung der Integrale (2) setzen wir wieder das Oszillatorpotential (Anh. IV 12) voraus. Mit dem Ansatz (Le 56)

$$(8) \quad \psi(r_2) = -V_0 e^{-\left(\frac{r_2}{\beta}\right)^2} \quad V_0 = 68.6 \text{ MeV} \quad \beta = 1.55 f$$

$$a = 0.31 \quad b = -0.06 \quad c = -0.15 \quad d = -0.10$$

für die effektiven Zweikörperkräfte ergibt sich (W1 58)

(Tabelle 7)	ΔE	$q = 0,47 f^{-2}$	$q = 0,36 f^{-2}$
	$E_4 - E_0$	12.5 MeV	10.5 MeV
	$E_2 - E_0$	3.75 "	3.1 "

Es ist die Gleichung (7), die, da sie in guter Näherung auch für die experimentellen Energiewerte gilt, uns die Hoffnung gibt, dass bei genauerer Kenntnis der Kernkräfte auch eine Berechnung der Energiedifferenzen und der Energiewerte selbst möglich ist, in die nicht mehr zahlreiche mehr oder weniger genau festzulegende Parameter eingehen.

Literaturverzeichnis

- (Aj 52) F. Ajzenberg und T. Lauritsen, Revs. mod. Phys.
24, 321 (1952)
- (Aj 55) F. Ajzenberg und T. Lauritsen, Revs. mod. Phys.
27, 77 (1955)
- (Be 56) H. A. Bethe, Phys. Rev. 103, 1353 (1956)
- (Bi 57) S. J. Biel, Proc. Phys. Soc. A 70, 866 (1957)
- (Bl 51) I. Bloch, M. Hull, A. A. Broyles, W. G. Bouricius,
B. E. Freeman, G. Breit, Revs. mod. Phys. 23, 147 (1951)
- (Br 58) K. A. Brueckner und J. L. Gammel, Phys. Rev.
109, 1023 (1958)
- (Bu 57) W. E. Burcham, W.M. Gibson, D.J. Prowse, J. Rotblat,
Nucl. Phys. 3, 217 (1957)
- (Ch 30) J. Chadwick, Proc. Roy. Soc. A 128, 114 (1930)
- (Ch 49) G.F. Chew und M. L. Goldberger, Phys. Rev.
75, 1637 (1949)
- (De 39) S. Devons, Proc. Roy. Soc. A 172, 559 (1939)
- (Ed 52) S.F. Edwards, Proc. Cambr. Phil. Soc. 48, 652 (1952)
- (Ei 56) R.M. Eisberg, Phys. Rev. 102, 1104 (1956)
- (El 57) J.P. Elliott und A.M. Lane, Handbuch der Physik
Bd. 39, S. 241 f (1957)
- (Fe 37) E. Feenberg und E. Wigner, Phys. Rev. 51, 95 (1937)
E. Feenberg und M. Phillips, Phys. Rev. 51, 597 (1937)
- (Fe 56) A.M. Feingold, Phys. Rev. 101, 358 (1956)
- (Fr 55) C.E. Fröberg, Revs. mod. Phys. 27, 399 (1955)
- (Gr 51) E. Graves, Phys. Rev. 84, 1250 (1951)
- (Ha 51) R.H. Haefner, Revs. mod. Phys. 23, 228 (1951)
- (He 56) N.P. Heydenburg und G.M. Temmer, Phys. Rev. 104,
123 (1956)
- (He 57) A. Herzenberg, Nucl. Phys. 3, 1 (1957)
A. Herzenberg und A.S. Roberts, Nucl. Phys. 3, 314 (1957)
- (Ho 50) W.F. Hornyak, und T. Lauritsen, Phys. Rev. 77, 160 (1950)
- (Ho 55) R.E. Holland, D.R. Inglis, R.M. Malm und F.P. Mooring
Phys. Rev. 99, 92 (1955)
- (Ho 56) R. Hofstadter und R.W. McAllister, Phys. Rev. 102,
851 (1956)
- (Hu 37) F. Hund, Zeitschr. f. Physik, 105, 202 (1937)
- (Hu 57) C.H. Humphrey, Bull. Am. Phys. Soc. II 2, 72 (1957)
- (Hu 57) R. Hüper, Zeitschr. f. Naturforschung 12a, 295 (1957)

- (In 53) D.R.Inglis, Revs.mod.Phys. 25,390(1953)
- (In 53a) E.K.Inall,A.J.F.Boyle Phil.Mag.44,1081(1953)
- (Ja 48) Jahnke und F.Emde, Tafeln höherer Funktionen,
4. Auflage Leipzig 1948
- (Ja 50) J.D. Jackson und J.M.Blatt,Revs.mod.Phys 22,77(1950)
- (Je 55) J.H.D.Jensen und M.G.Mayer, Elementary Theory of
Nuclear Shell Structure, New York 1955
- (Jo 52) R.Jost und W.Kohn, Phys. Rev. 87,977(1952)
- (Ku 55) D.Kurath, Phys. Rev.101,216 (1956)
- (La 56) E.C.LaVier, S.S.Hanna, R.W.Gelmas, Phys. Rev.
103, 143 (1956)
- (Le 56) Lederer, Diplomarbeit München 1956, ziteiert
nach (Wi 58)
- (Ma 41) H.Margenau, Phys.Rev. 59,37 (1941)
- (Ma 53) S.T. Ma, Revs. mod. Phys. 25, 853 (1953)
- (Me 58) V.Meyer und H.H.Staub, Helv.Phys.Acta,31,205(1958)
- (Mo 30) N.F. Mott, Proc. Roy Soc. A 126, 259 (1930)
- (Mo 37) B.O.Mohr, G.E.Pringle,Proc.Roy.Soc. A 160,190(1937)
- (Mo 49) N.F. Mott und H.S.W.Massey, The Theory of Atomic
Collisions, 2. Aufl. Oxford 1949
- (Ni 56) R.Nilson,R.O.Kerman,G.R.Briggs,W.Jentschke,
Phys.Rev.104,1673 (1956)
- (Ni 58) R.Nilson,~~W.~~Jentschke,G.R.Briggs,R.O.Kerman,
J.~~N.~~Snyder,Phys.Rev. 109, 850 (1958)
- (Ru 27) R.Rutherford, J.Chadwick, Phil.Mag. 4,605 (1927)
- (Re 56) C.W.Reich,J.L.Russell,G.C.Phillips,Phys. Rev.
104,135 (1956)
- (Ri 39) H.T.Richards, Phys. Rev. 59,796 (1941)
- (Sch 49) L.I.Schiff,Quantum Mechanics,New York 1949
- (Sk 55) T.H.R. Skyrme und J.P.Elliott, Proc. Roy.Soc.
A 232,561 (1955)
- (Sk 56) T.H.R.Skyrme und J.K.Perring,Proc.Phys.Soc.
A 69, 600 (1956)
- (Sk 59) T.H.R.Skyrme, Nucl.Phys. 9,615 (1959)
- (Sp 58) E. v.d.Spuy und H.J.Piennar, Nucl.Phys. 7,397(1958)
- (Sp 59) E. v.d.Spuy, Nucl. Phys. 11,615 (1959)
- (St 53) F. E. Steigert und M. B. Sampson, Phys. Rev. 92,
660 (1953)
- (Ta 32) H.M.Taylor, Proc. Roy Soc. A 136, 605 (1932)
H.M.Taylor, Proc. Roy.Soc. A 134, 103 (1932)
- (Tr 54) C.C.Trail,C.H.Johnson,Phys. Rev. 95,1363 (1954)

- (Tu 58) Tubis, Tables of nonrelativistic Coulomb Wave Functions, Los Alamos Scientific Lab. 1958
- (Wa 50) B.L.v.d.Waerden, Moderne Algebra, I. Teil 3. Aufl. Berlin 1950
- (We 58) V.F. Weisskopf L.C.Gomes J.D.Walecka, Ann.of Phys. 3, 241 (1958)
- (Wh 41) J.A. Wheeler, Phys. Rev. 59, 16 und 27 (1941)
- (Wi 58) K.Wildermuth und Th.Kanellopoulos, Nucl. Phys. 7, 150 (1958)
- (Wi 59) K.Wildermuth und Th.Kanellopoulos, Nucl. Phys. 9, 449 (1959)
- (Wr 32) P.Wright, Proc. Roy. Soc. A 137, 677 (1932)
- (Zu 53) R. Zurmühl, Praktische Mathematik, Berlin 1953

Erläuterungen zu den Abbildungen 1 bis 26

Fig. 1 Niveauschema des Kernes Be 8 (Auszug) nach (Aj 55)

Fig. 2 $\eta = \eta(E)$ und $k = k(E)$ nach Gl. (I 33)

Fig. 3 α - α -Potential für $L = 0$, $a = 3,5 f$ nach (IV 19)

Fig. 4 α - α -Potential für $L = 2$, $a = 3,5 f$ nach (IV 19)

Fig. 5 α - α -Potential für $L = 4$, $a = 3,5 f$ nach (IV 19)

Fig. 6 $D_1 = D_1(ka)$ nach Gl. (V 16). Die Kreise entsprechen der Reihe nach von rechts nach links den Kurven $a \dots h$ der Fig. 7

Fig. 7 Potentialtopftiefe $U_0 = -U(a, D_0)$ (Gl. IV 17)

Kurve a entspricht $D_0 = -2,48$

b $-1,86$

c $-1,24$

d $-0,62$

e $\pm 0,00$

f $+0,62$

g $+1,24$

h $+1,86$

Fig. 8 Vergleich von D_1 mit D_a als Funktion der Energie für $a = 3,5 f$; $L = 0$, $D_0 = -1,24$

Kurve a: D_1 nach dem Modellpotential berechnet

b: D_a aus den interpolierten, experimentellen Streuphasen berechnet

Fig. 9. Vergleich von D_1 mit D_a als Funktion der Energie für $a = 4,0 f$ $L = 0$ $D_0 = -1,24$

Kurve a: D_1 für das Modellpotential berechnet

b: D_a aus den experimentellen Streuphasen berechnet.

Fig. 10 Vergleich von D_1 und D_a als Funktion der Energie für $a = 3,5 f$ $L = 2$ $D_0 = -1,24$

Kurve a: D_1 für das Modellpotential berechnet

b: D_a aus den experimentellen Streuphasen berechnet.

Fig. 11 Vergleich von D_1 mit D_a als Funktion der Energie

für $a = 4,0$ f $L = 2$ $D_0 = -1,24$

Kurve a: D_1 aus dem Modellpotential berechnet

b: D_a aus den experimentellen Streuphasen
berechnet

Fig. 12 Vergleich von D_1 mit D_a als Funktion der Energie
für $a = 3,5$ f $L = 4$

Kurve a: D_1 aus dem Modellpotential für $D_0 = +1,24$

b: D_1 " " " " $D_0 = -1,24$

c: D_a aus den experimentellen Streuphasen
berechnet

Fig. 13 Vergleich von D_1 mit D_a als Funktion der Energie
für $a = 4,0$ f $L = 4$,

Kurve a: D_1 aus dem Modellpotential für $D_0 = +1,24$

b: D_1 " " " " $D_0 = 0,00$

c: D_1 " " " " $D_0 = -1,24$

d: D_a aus den experimentellen Streuphasen
berechnet

Fig. 14 Funktionen, die für die Effektiv-Range-Theorie
wichtig sind

Fig. 15 Funktionen, die für die Effektiv-Range-Theorie
wichtig sind.

Fig. 16 Interpolationskurve für die Streuphase δ_0

Fig. 17 Darstellung der Funktion $K_0(k^2)$ für $L = 0$

Fig. 18 " " " $K_2(k^2)$ für $L = 2$

Fig. 19 " " " $K_4(k^2)$ für $L = 4$

Fig. 20 Differentieller Wirkungsquerschnitt der α - α -
Streuung für $E_{cm} = 7,6$ MeV nach (Ni 58). Die
Kreuze unterhalb der Kurve sind Messpunkte für
 $E_{cm} = 7,43$ MeV von Steigert und Sampson (St 53)

Fig. 21 Streuphasen nach dem Haefnermodell (IV 18)

a: $a = 3,49$ f, b: $a = 5,08$ f

Die Kreise sind Messpunkte. $L = 0$ (Ni 58)

Fig.22 Streuphasen nach dem Haefnermodell (IV 18)
a: $a = 5,08 f$ b: $a = 4,44 f$ c: $a = 3,49 f$
Die Kreise sind Messpunkte. $L = 2$ (Ni 58)

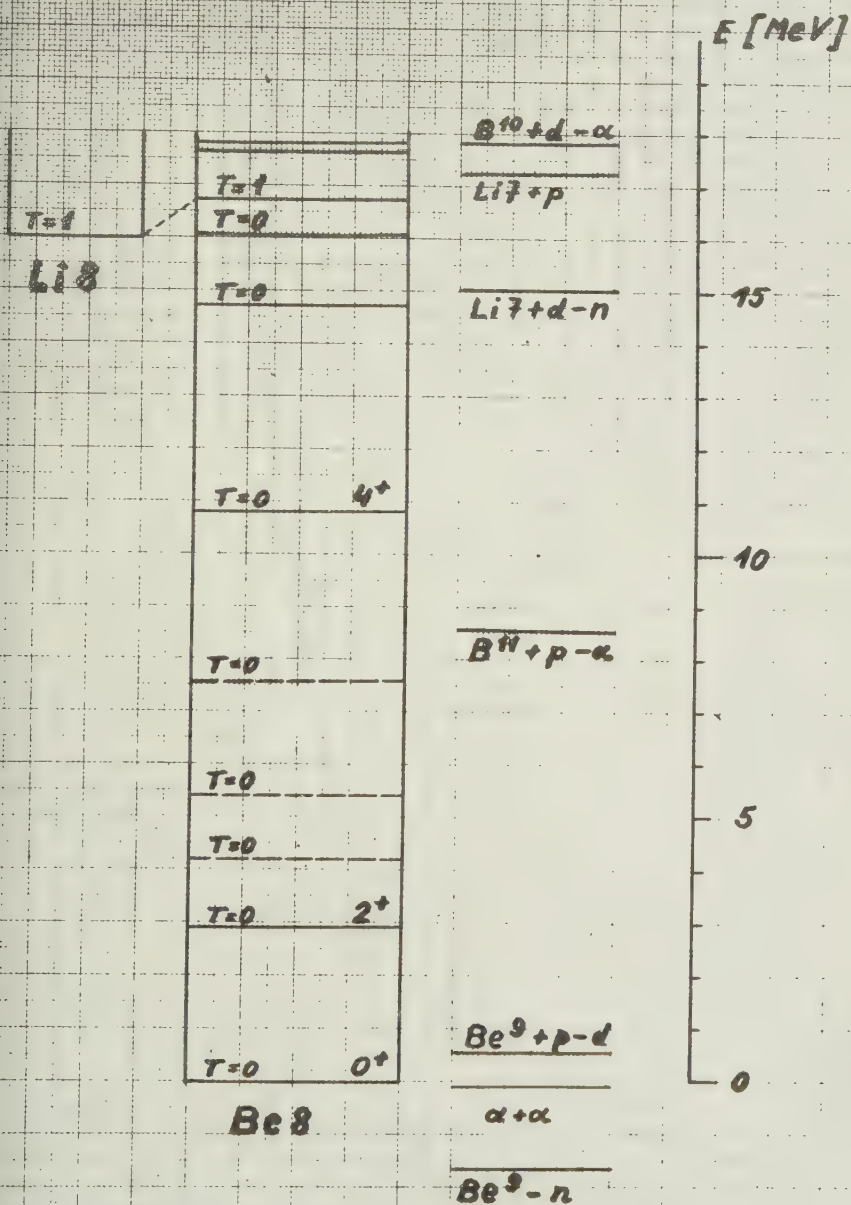
Fig.23 Streuphasen nach dem Haefnermodell (IV 18)
a: $a = 5,08 f$ b: $a = 4,60 f$ c: $a = 4,44 f$
d: $a = 4,13 f$
Die Kreise sind Messpunkte. $L = 4$ (Ni 58)

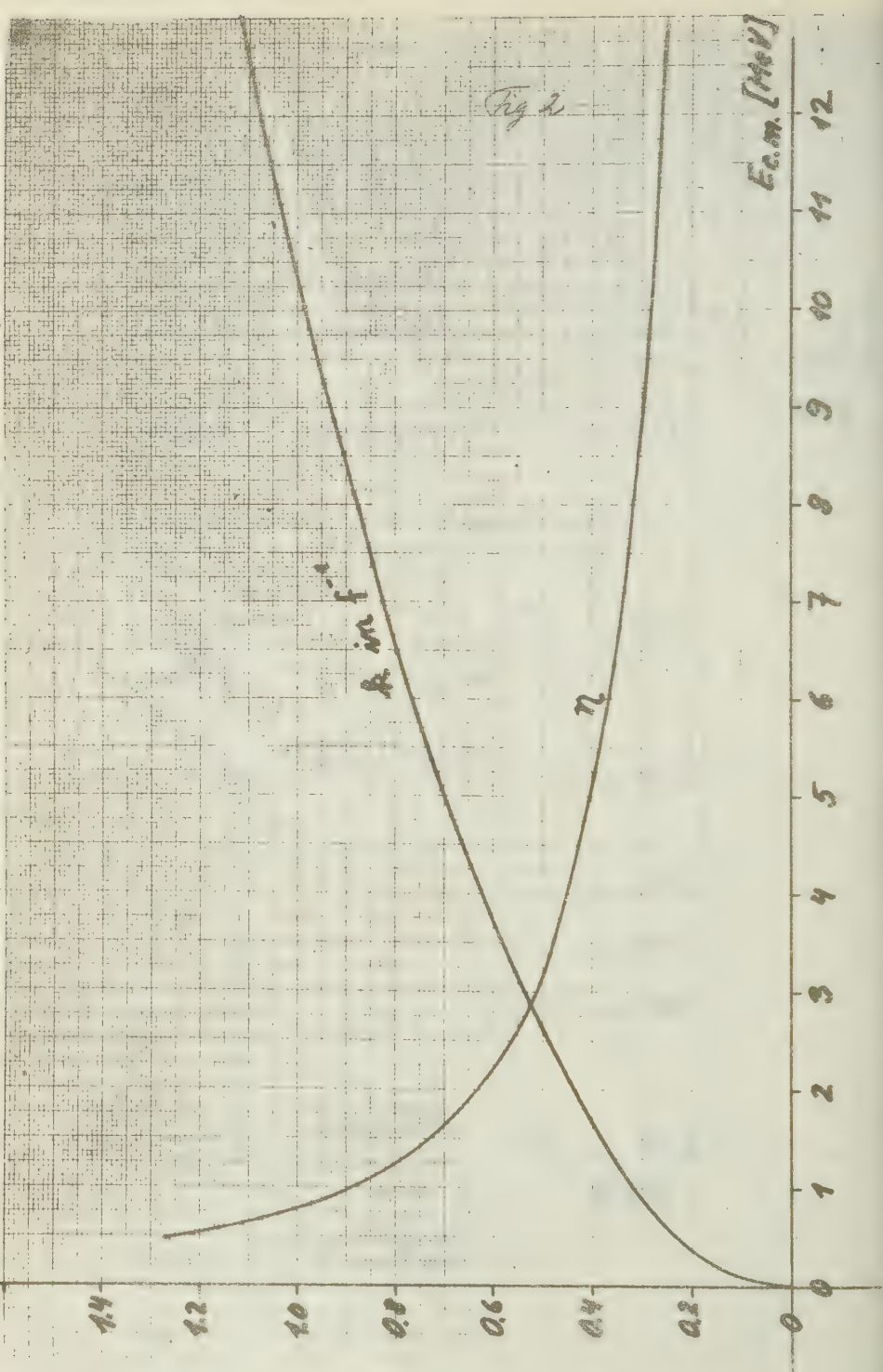
Fig.24 Streuphasen nach dem semiphänomenologischen
Potential (IV 16) für $a = 3,5 f$ und $L = 0$.
Die Kreise sind Messpunkte

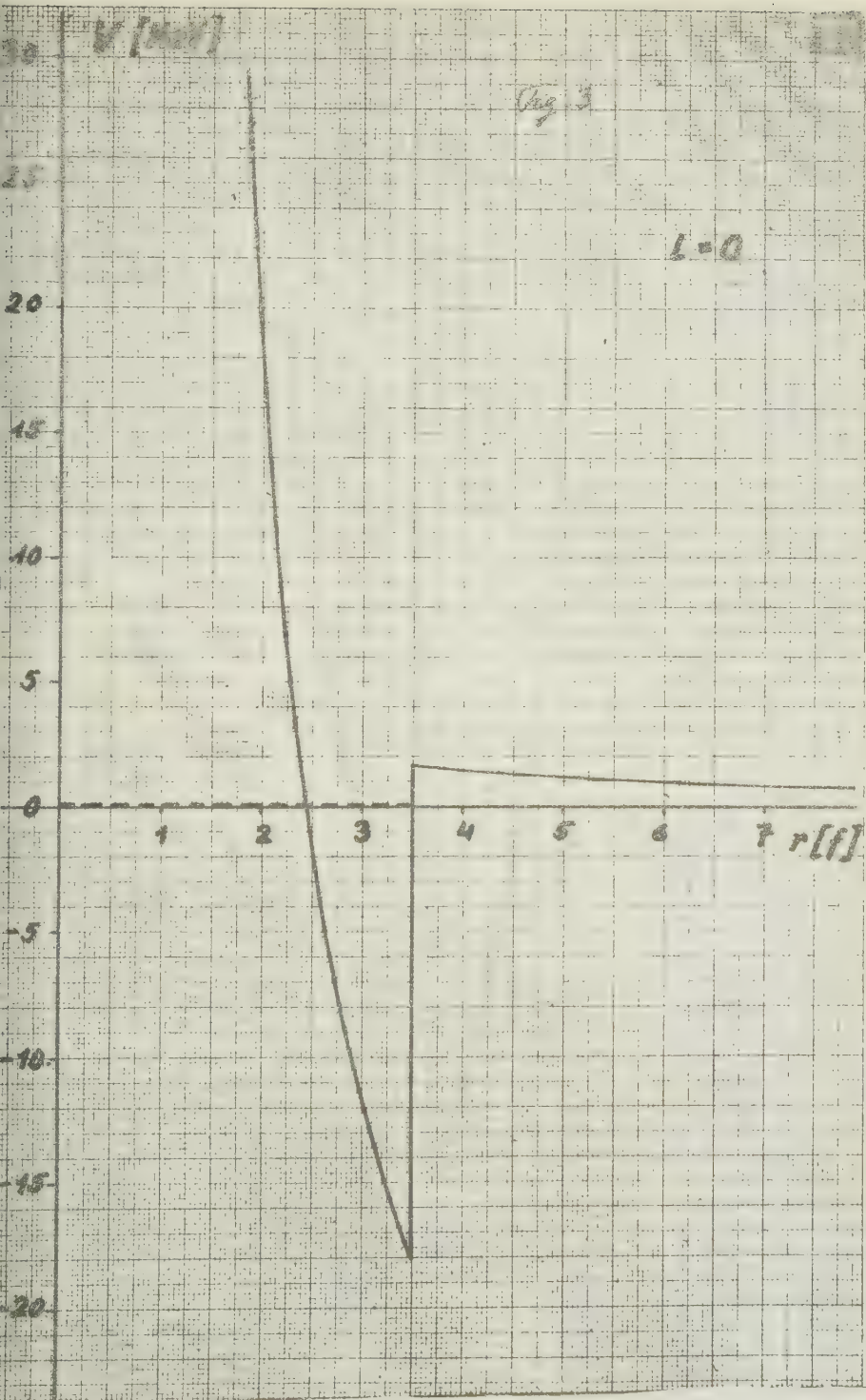
Fig.25 Streuphasen nach dem semiphänomenologischen
Potential (IV 16) für $a = 3,5 f$ und $L = 2$
Die Kreise sind Messpunkte

Fig.26 Streuphasen nach dem semiphänomenologischen
Potential (IV 16) für $a = 3,5 f$ und $L = 4$
Die Kreise sind Messpunkte

Fig. 1



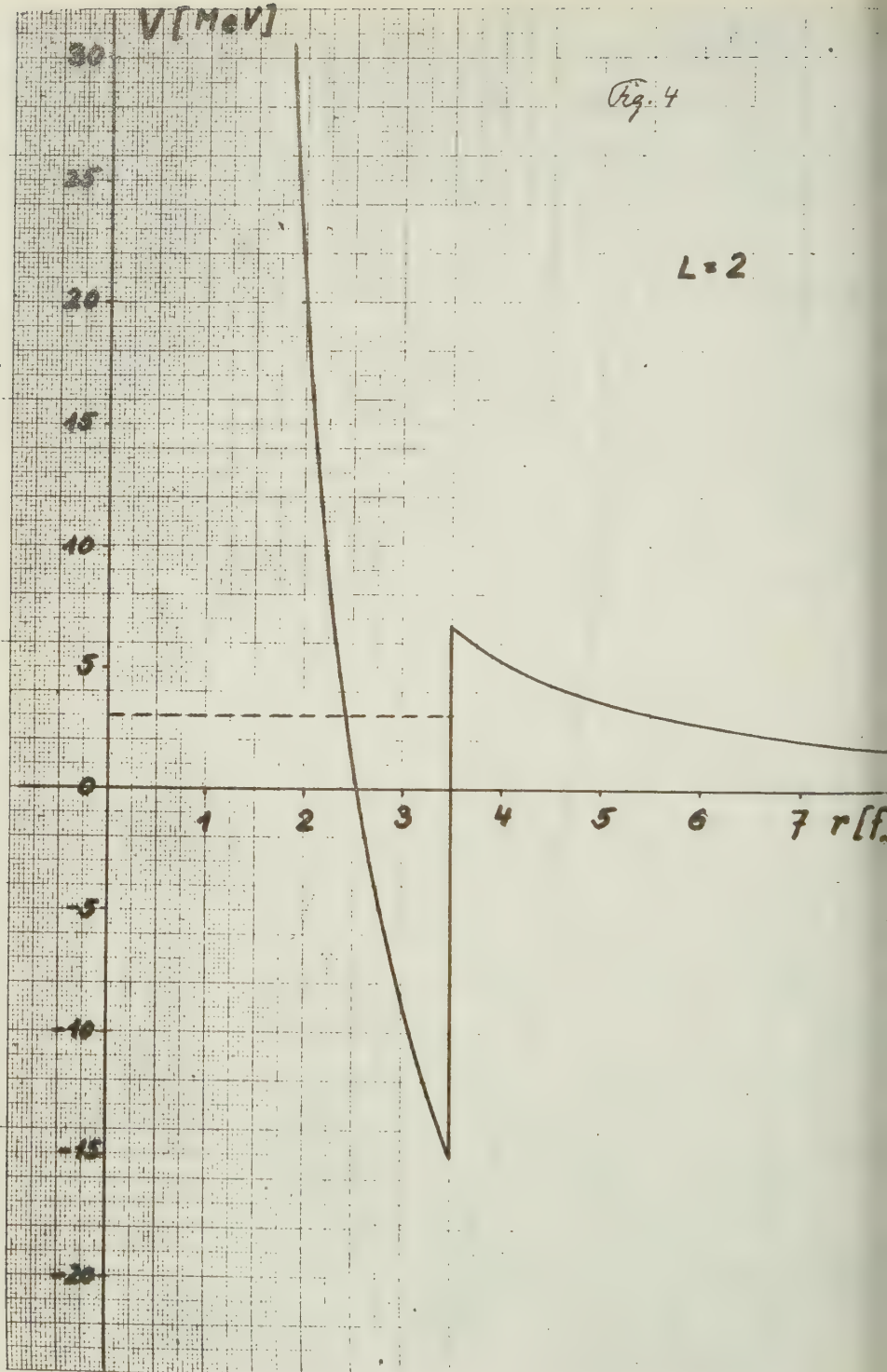


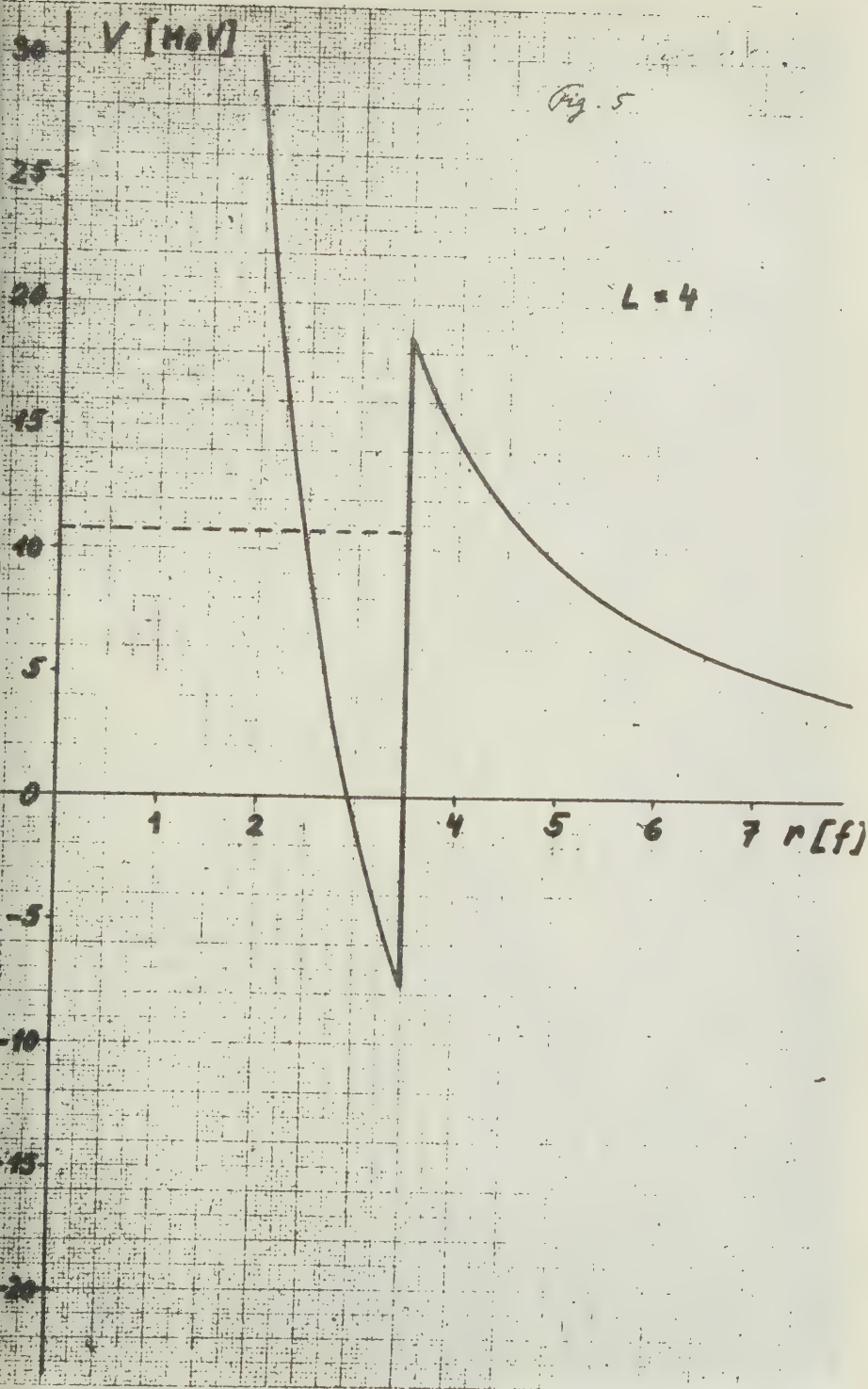


$V[\text{MeV}]$

Fig. 4

$L=2$



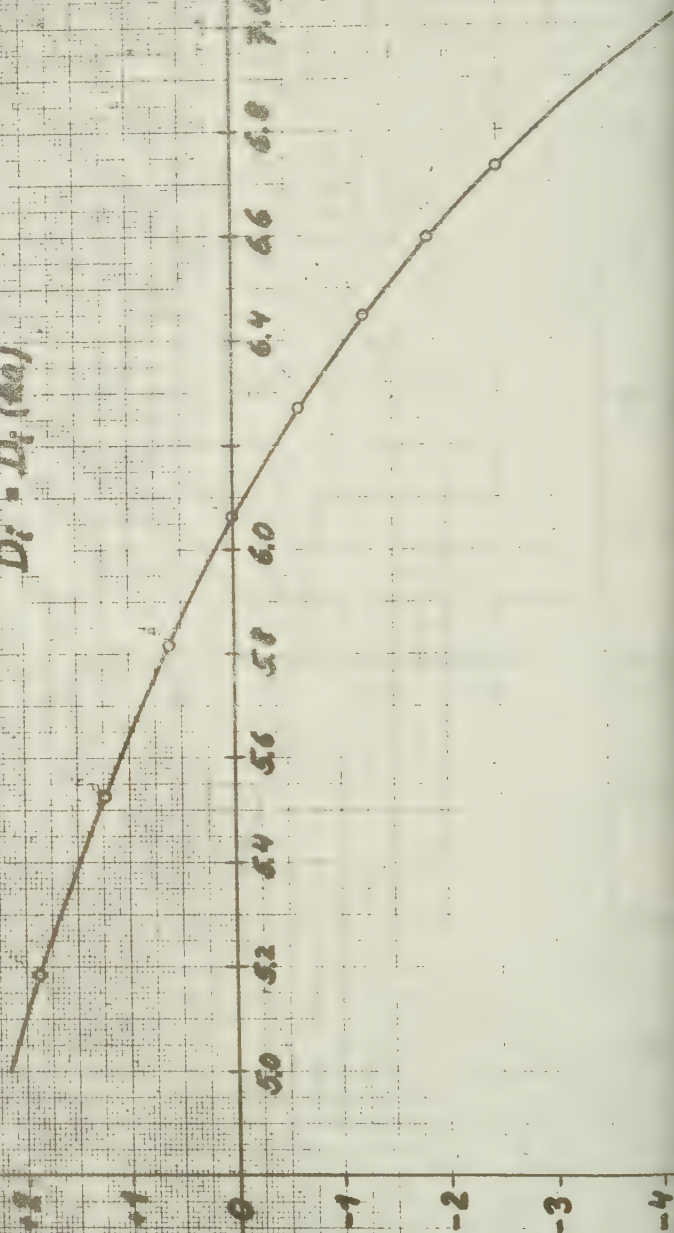


+3
+2
+1
0
-1
-2
-3
-4

$$D_i = D_i(k_0)$$

5.0 5.2 5.4 5.6 5.8 6.0 6.4 6.6 6.8 7.0 7.2

Fig. 6



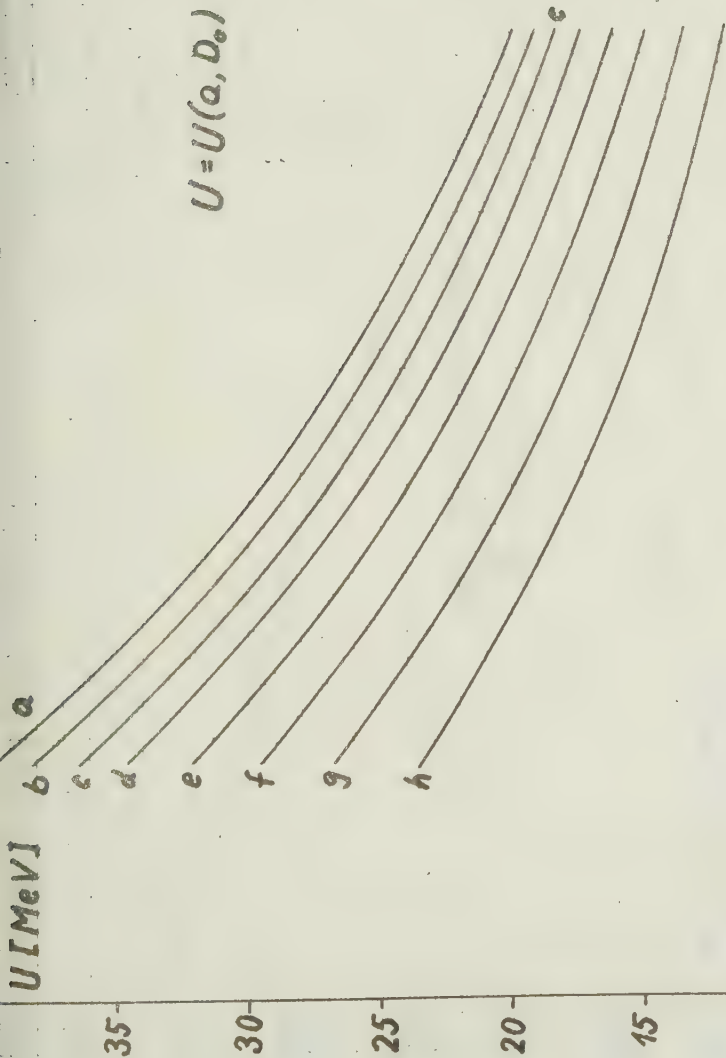


Fig. 7

α [r]

5.0

4.5

4.0

3.5

U [MeV]

35

30

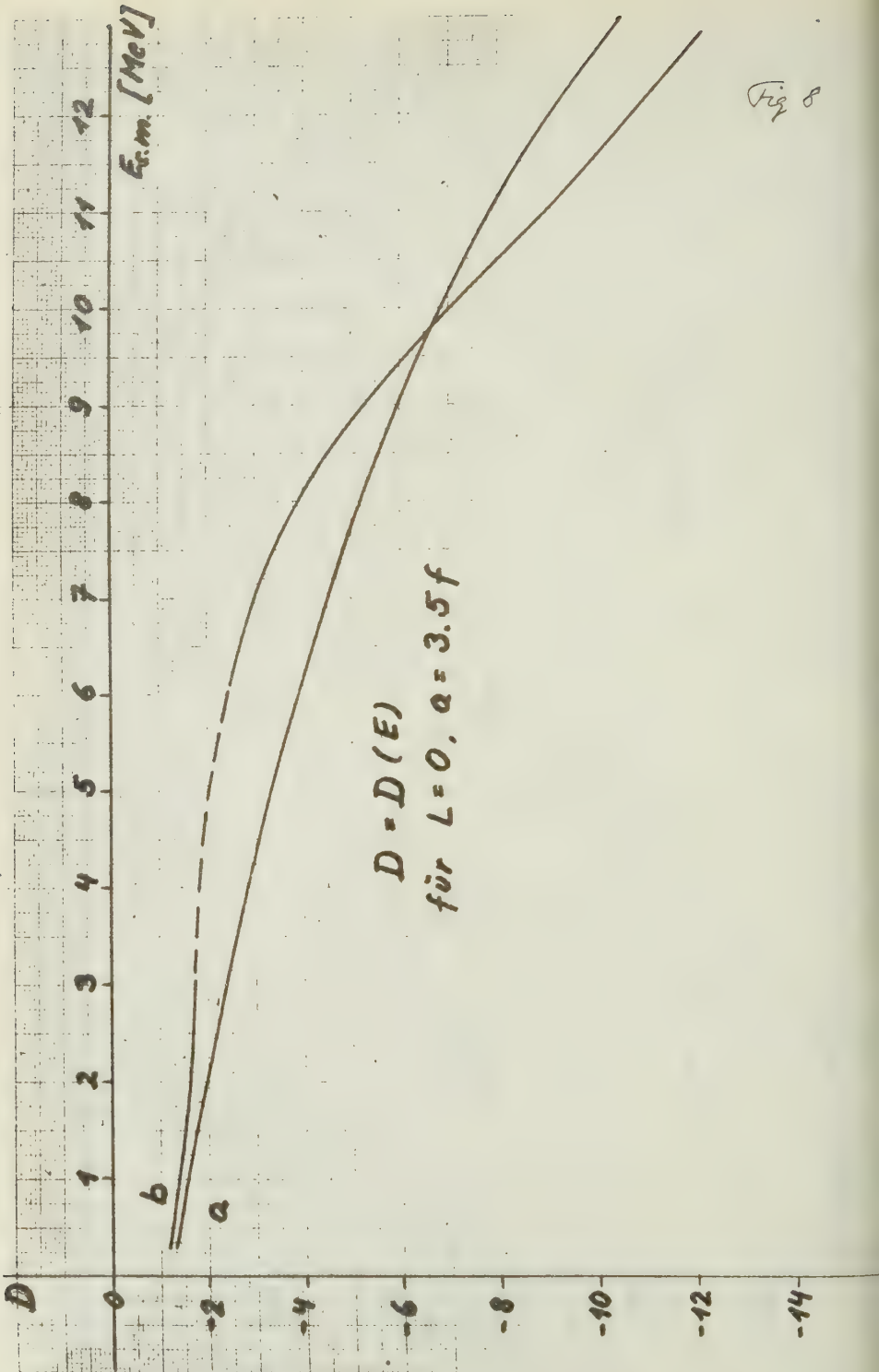
25

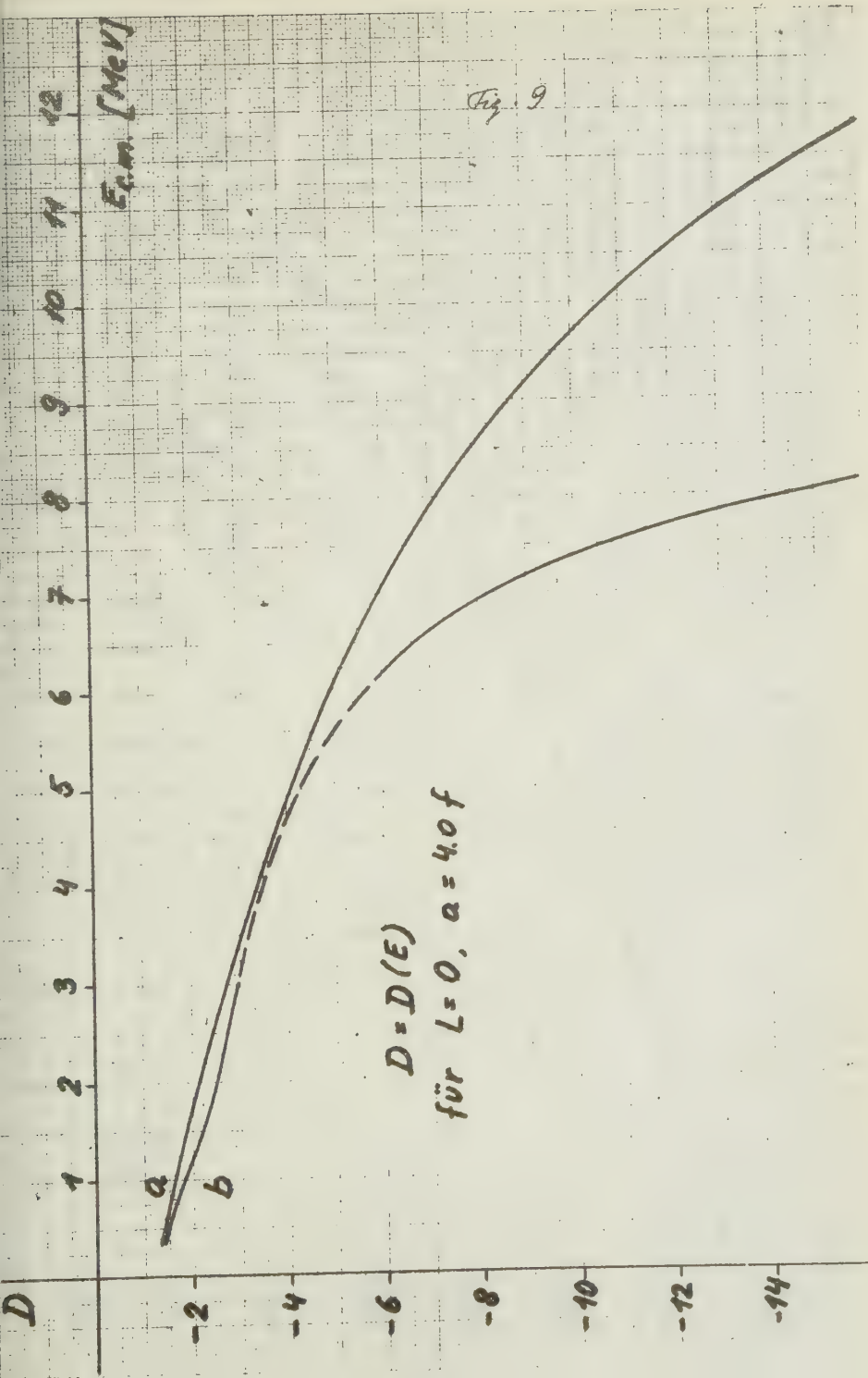
20

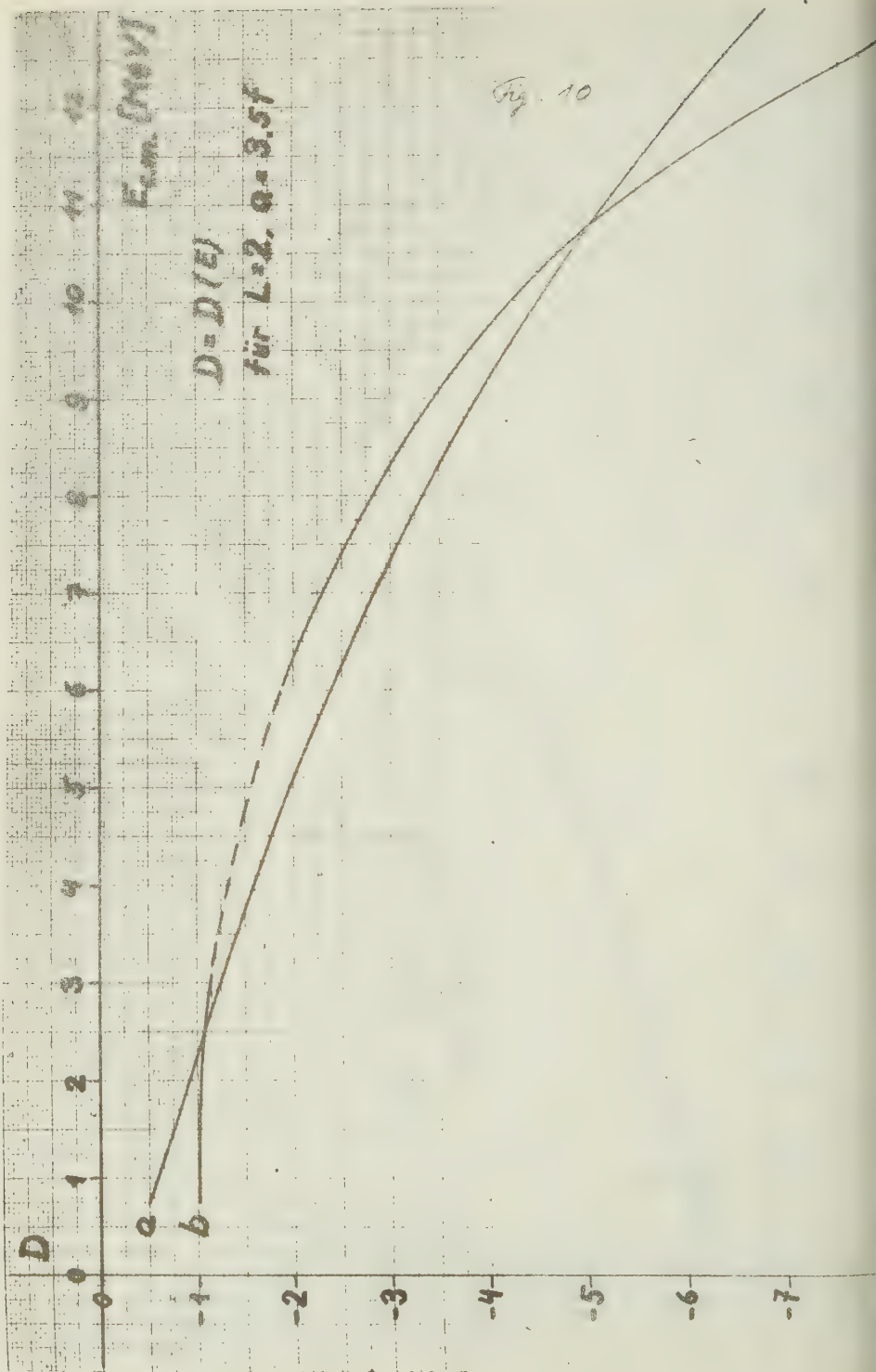
15

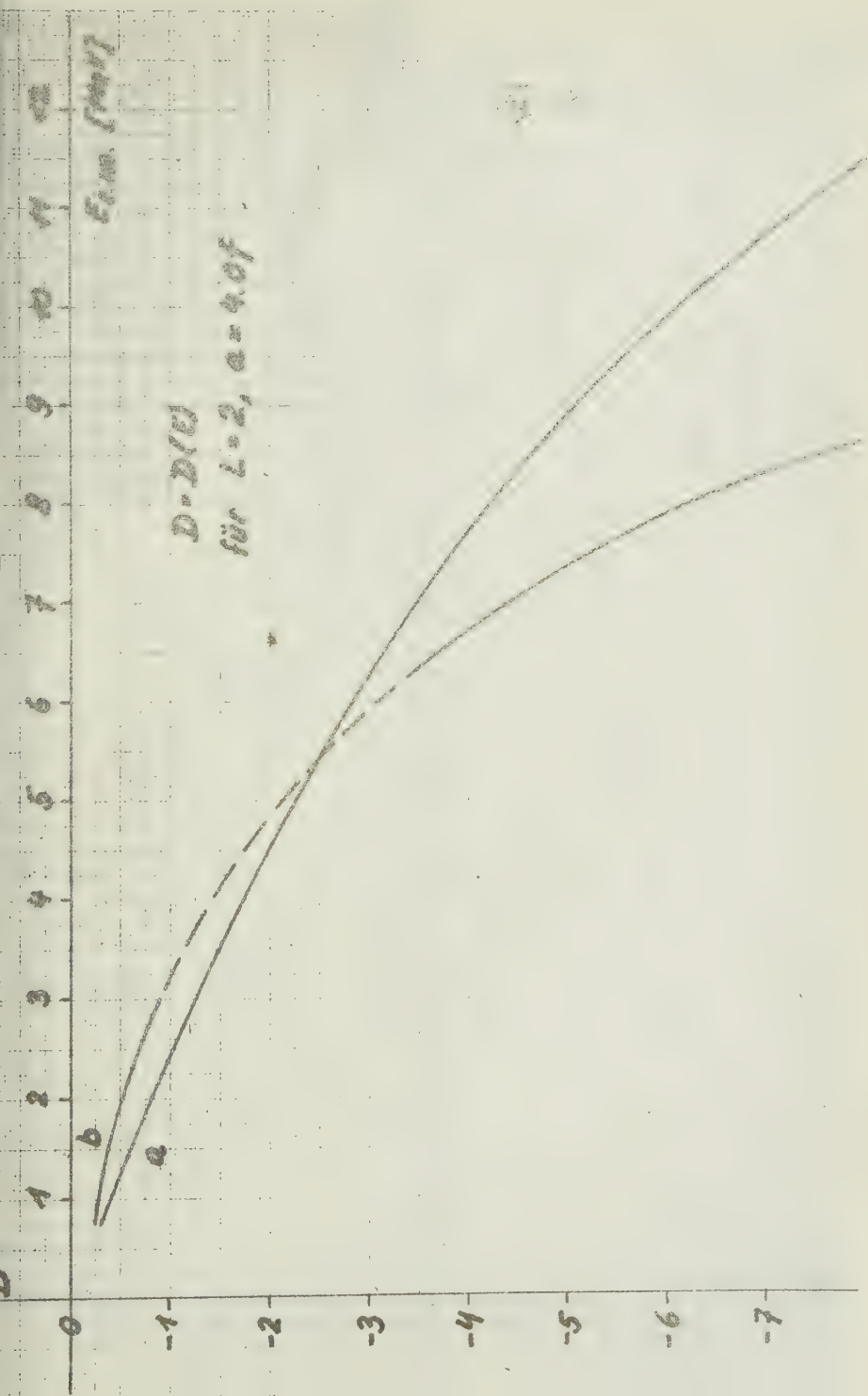
10

Fig 8









$$D = D(E)$$

für $L=4, a=3.5f$

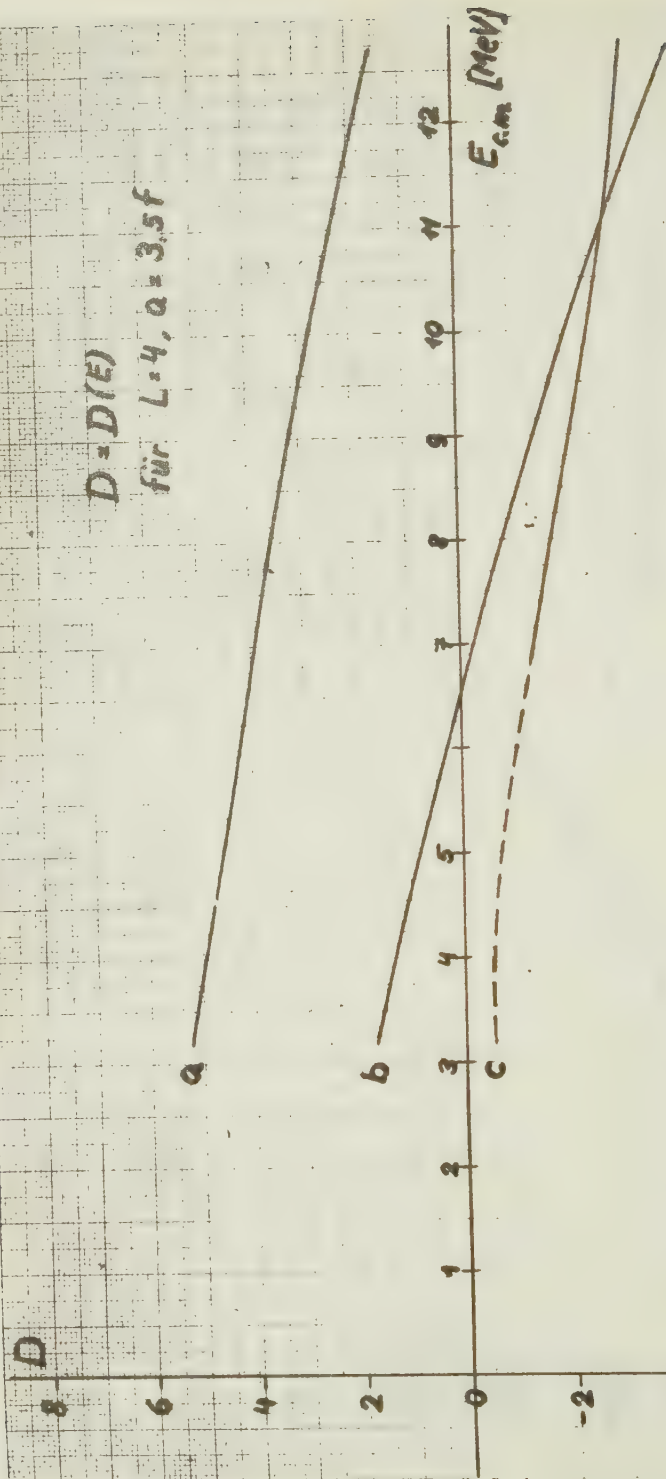


Fig. 12

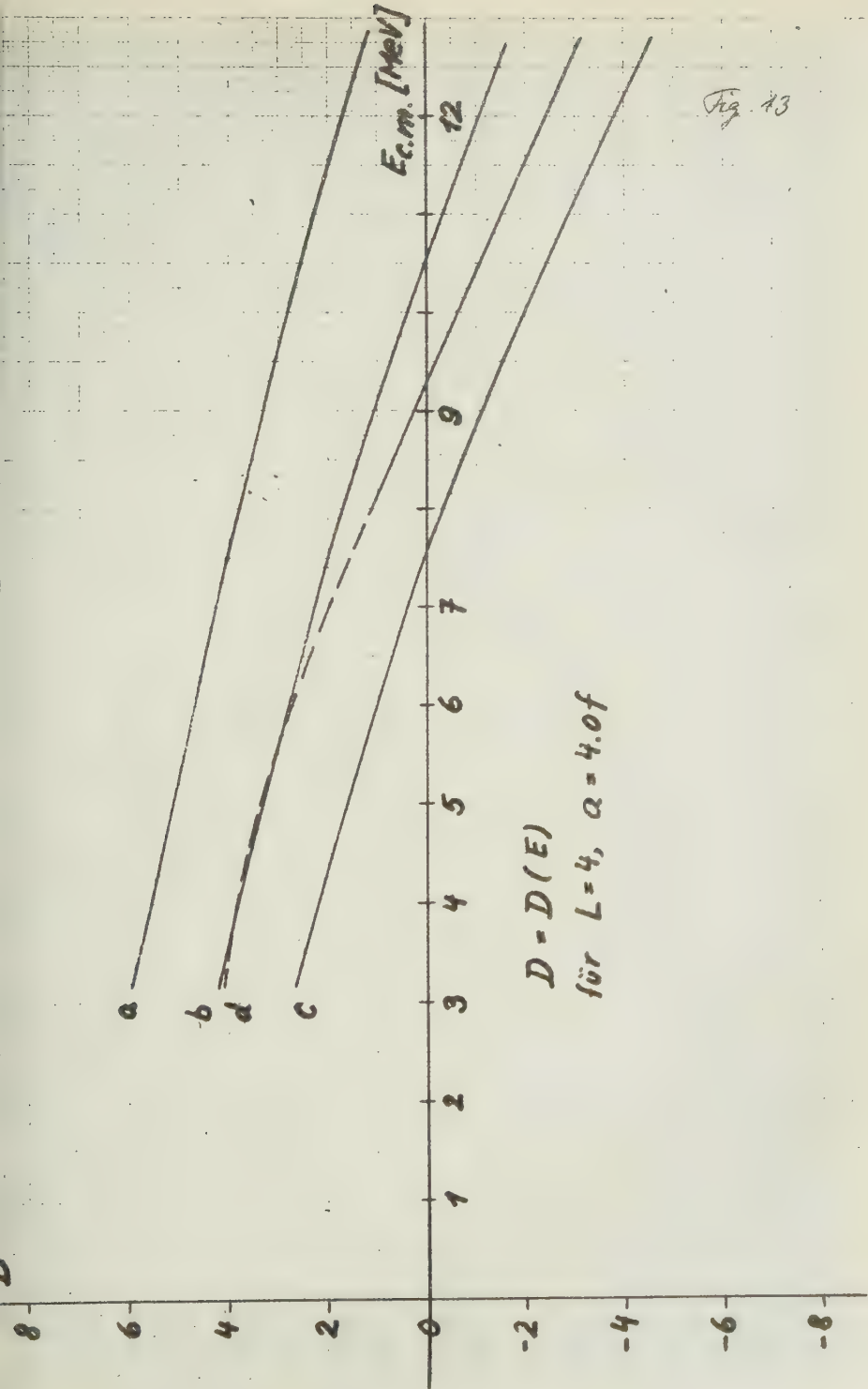
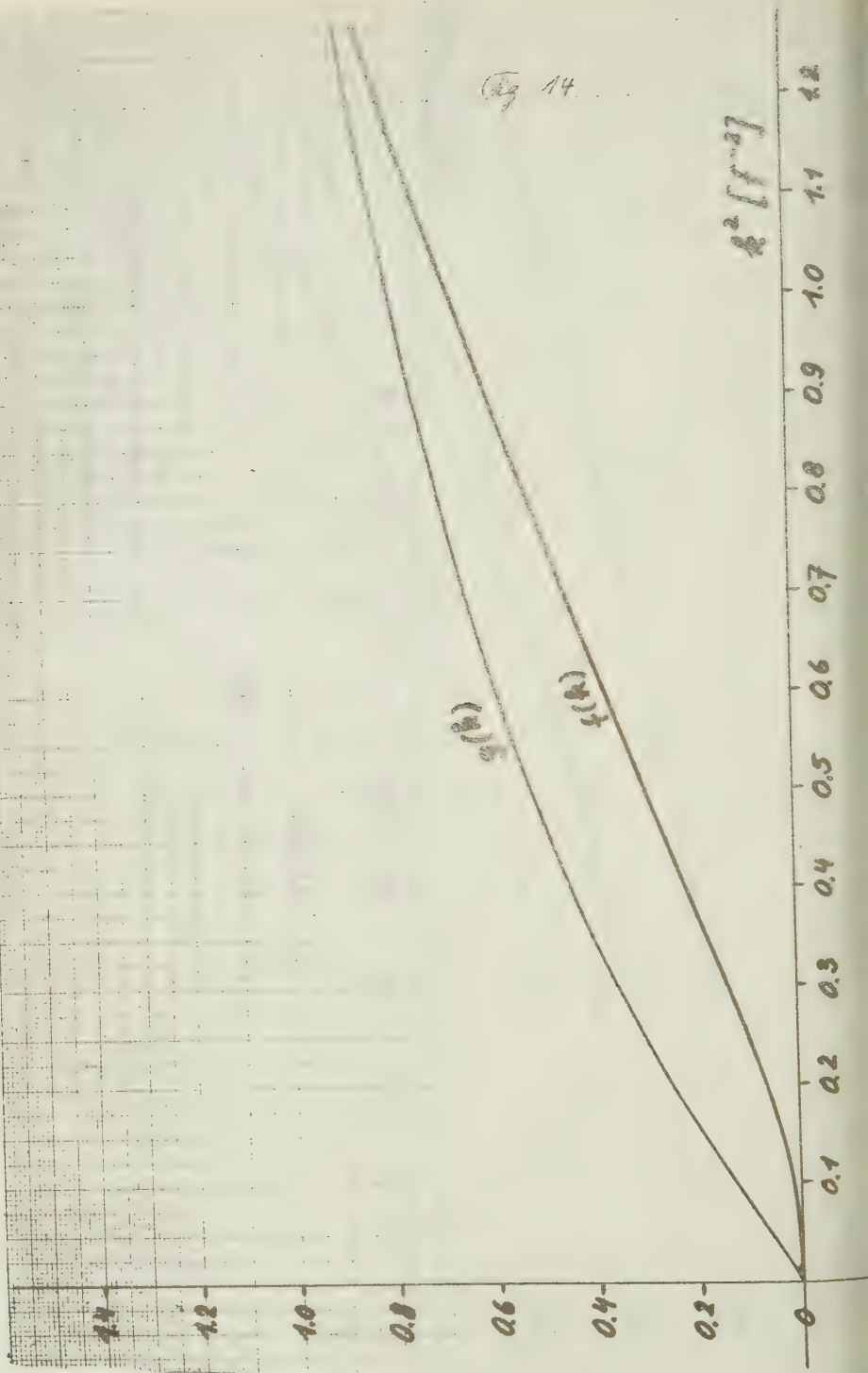


Fig. 13

Fig 14



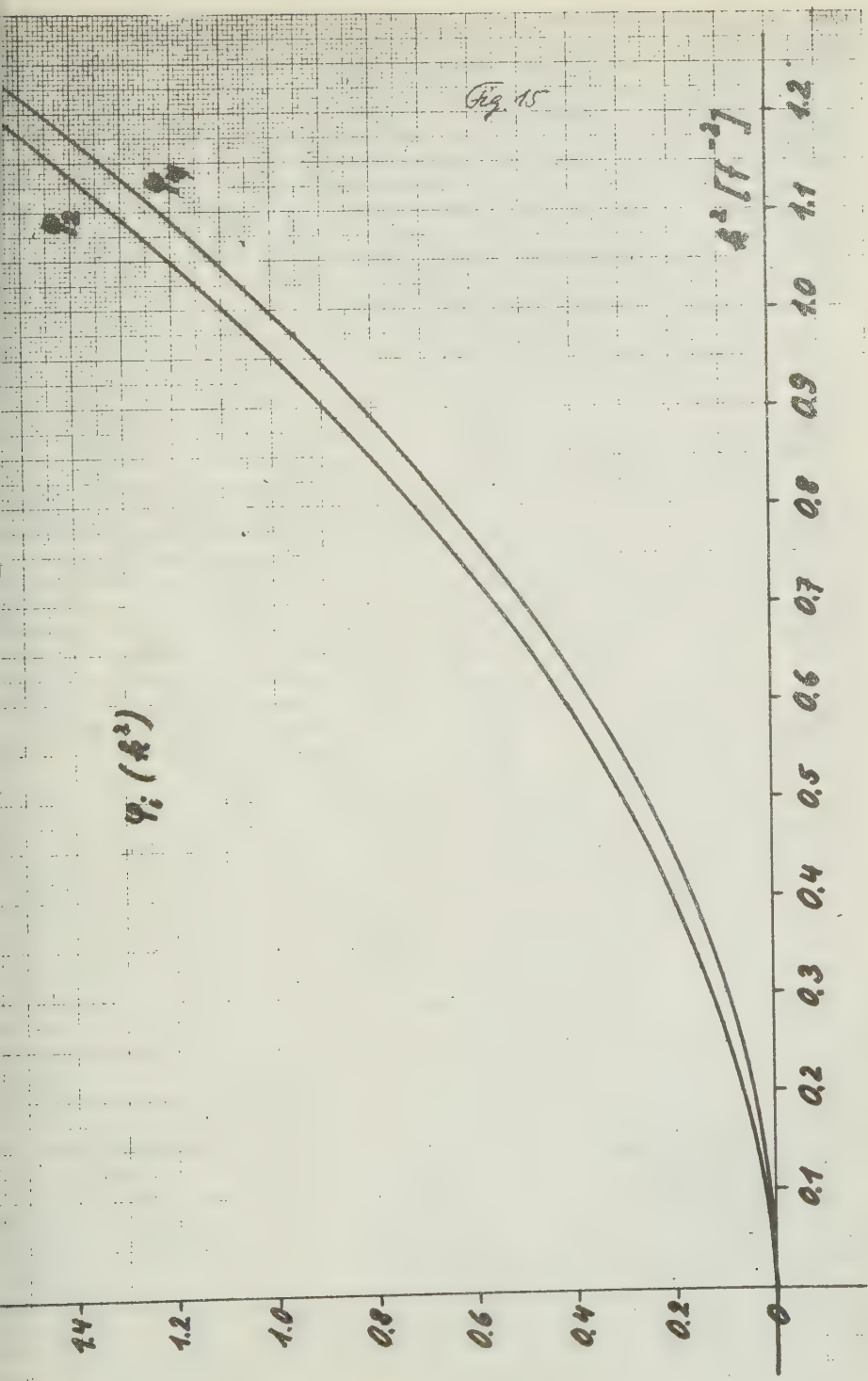
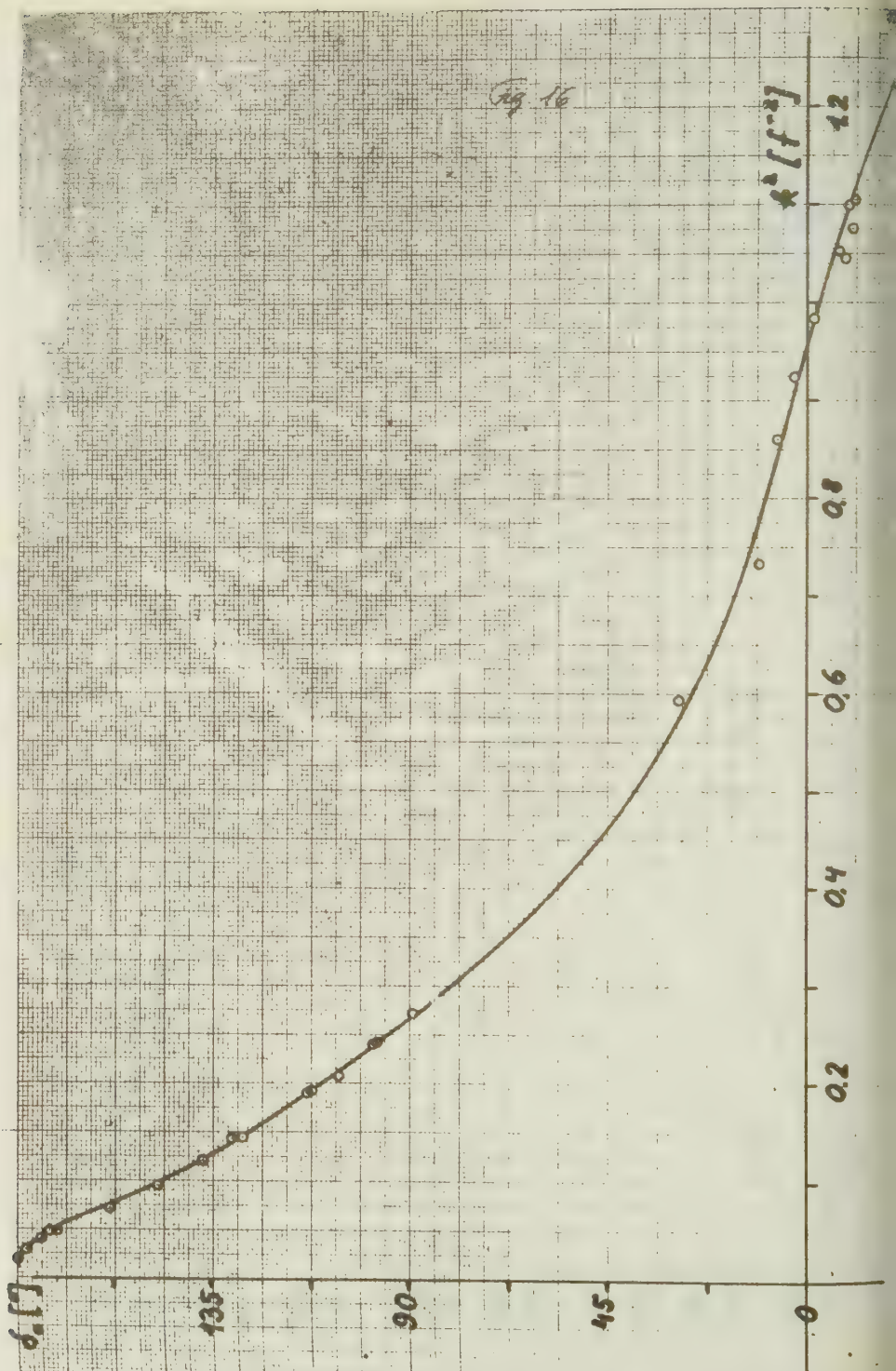
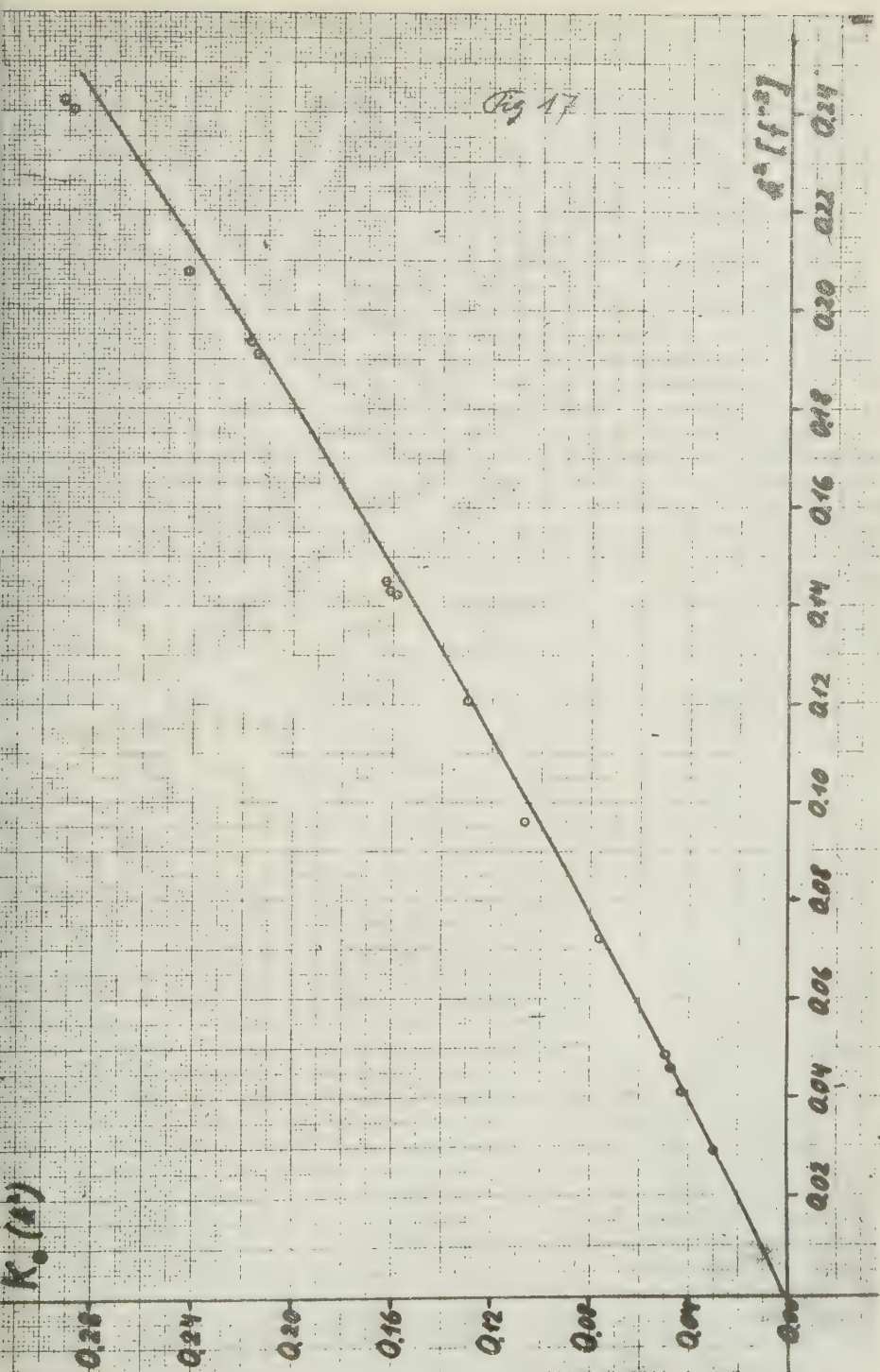
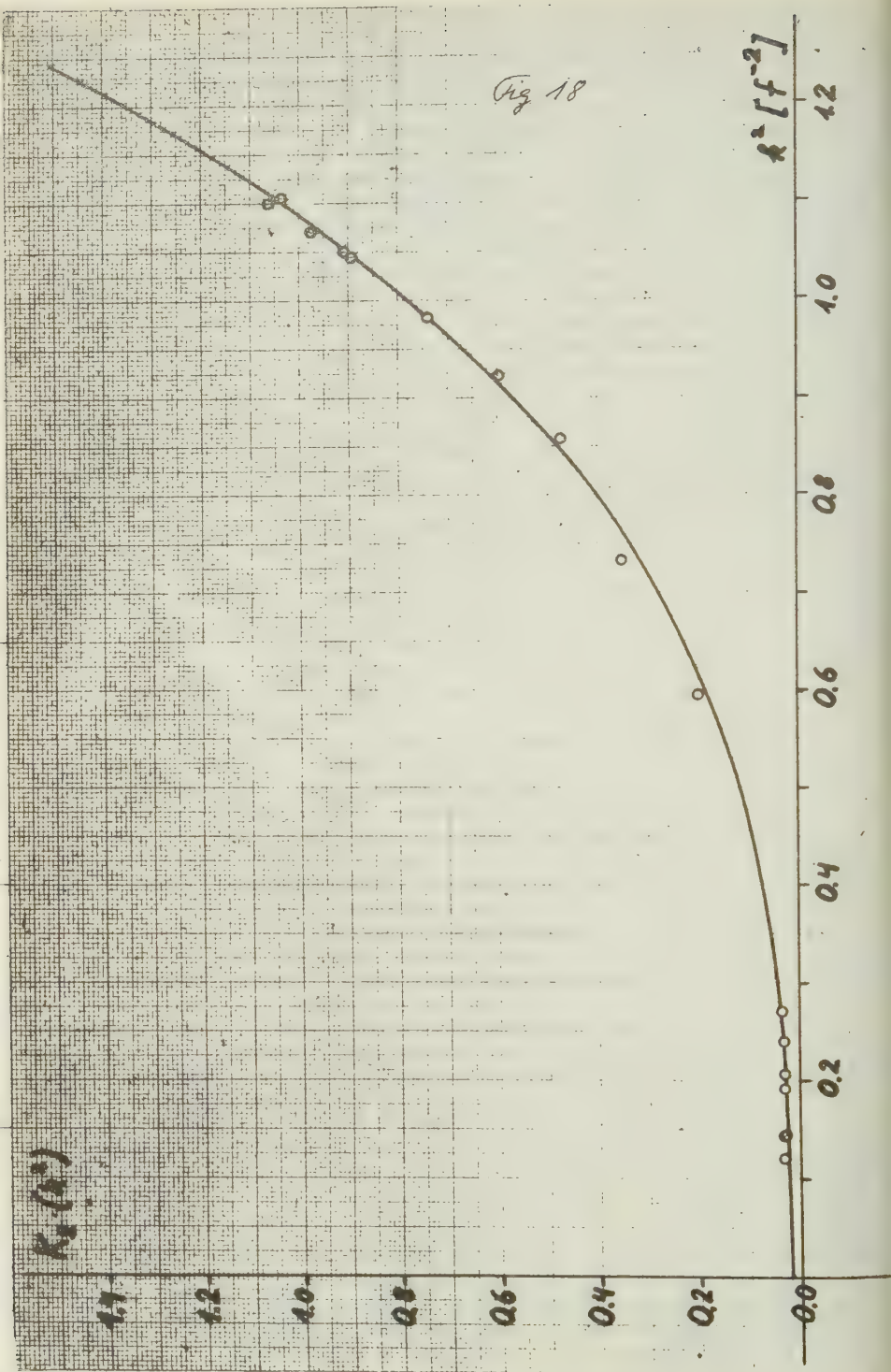


Fig. 16



$K_0(x)$





$K_0(k)$

2.2

2.0

1.8

1.6

1.4

1.2

1.0

Fig. 19

$k^2 [f^{-2}]$

0

0.1

0.2

0.3

0.4

0.5

0.6

0.7

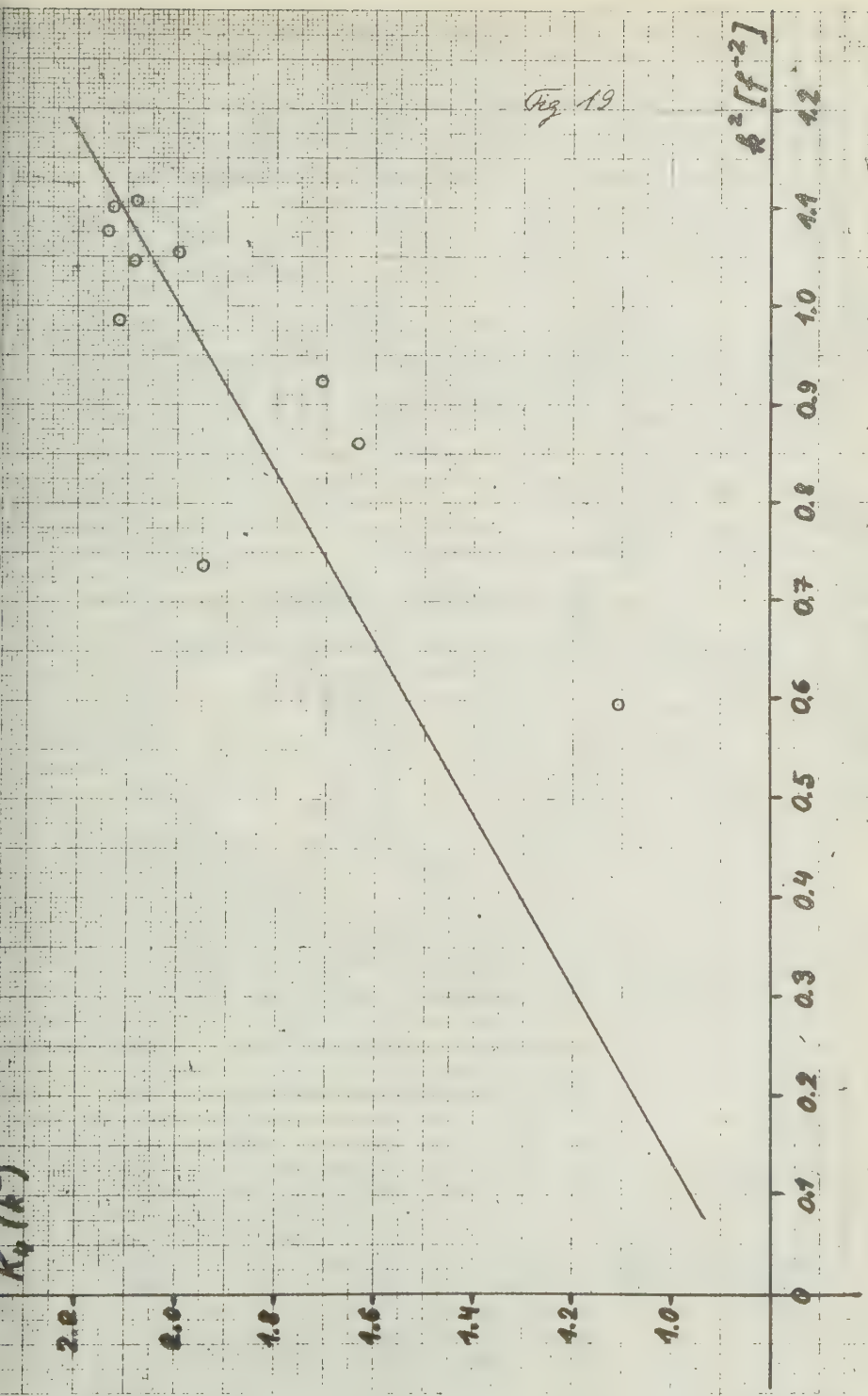
0.8

0.9

1.0

1.1

1.2



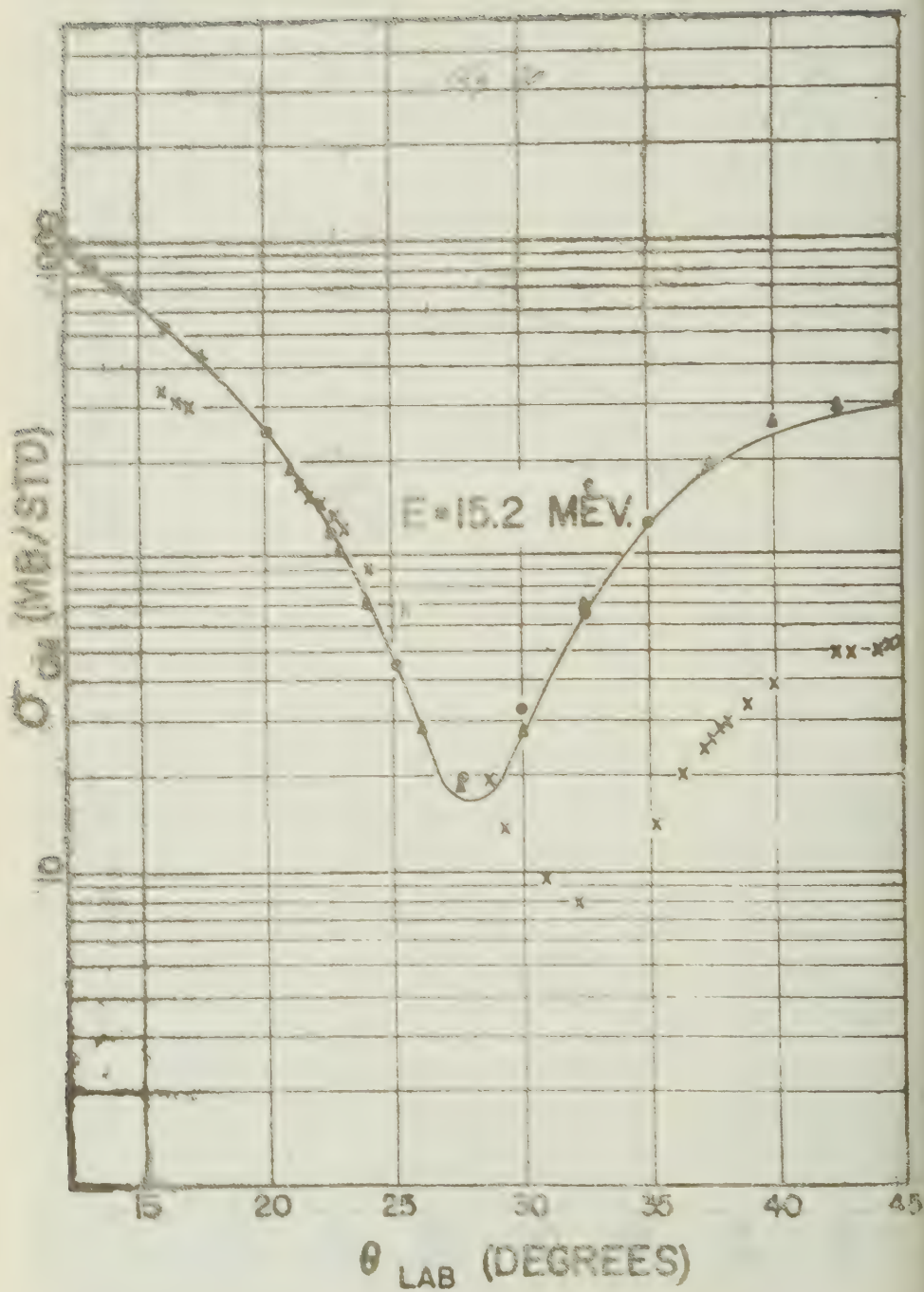
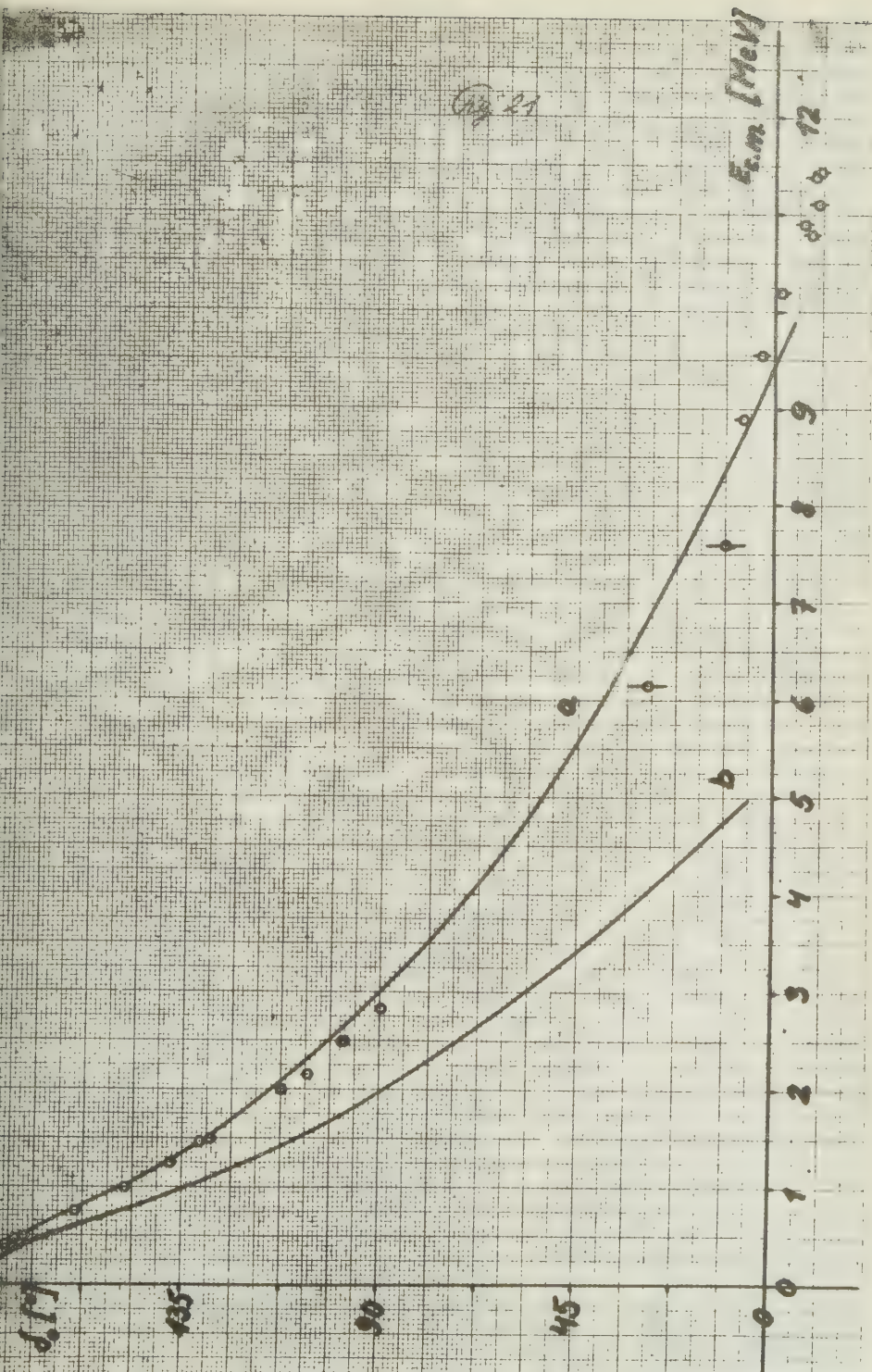
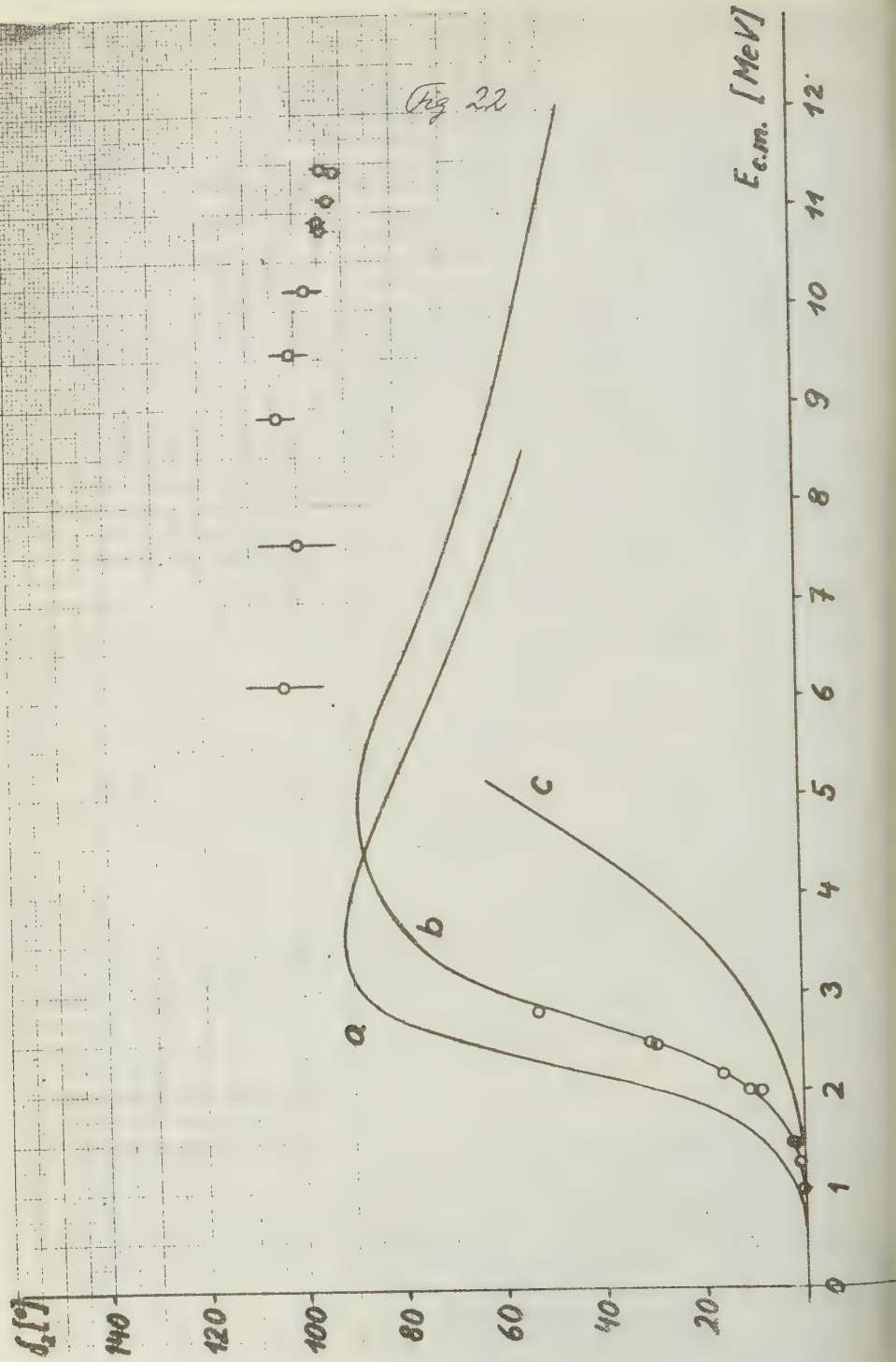


Fig. 21





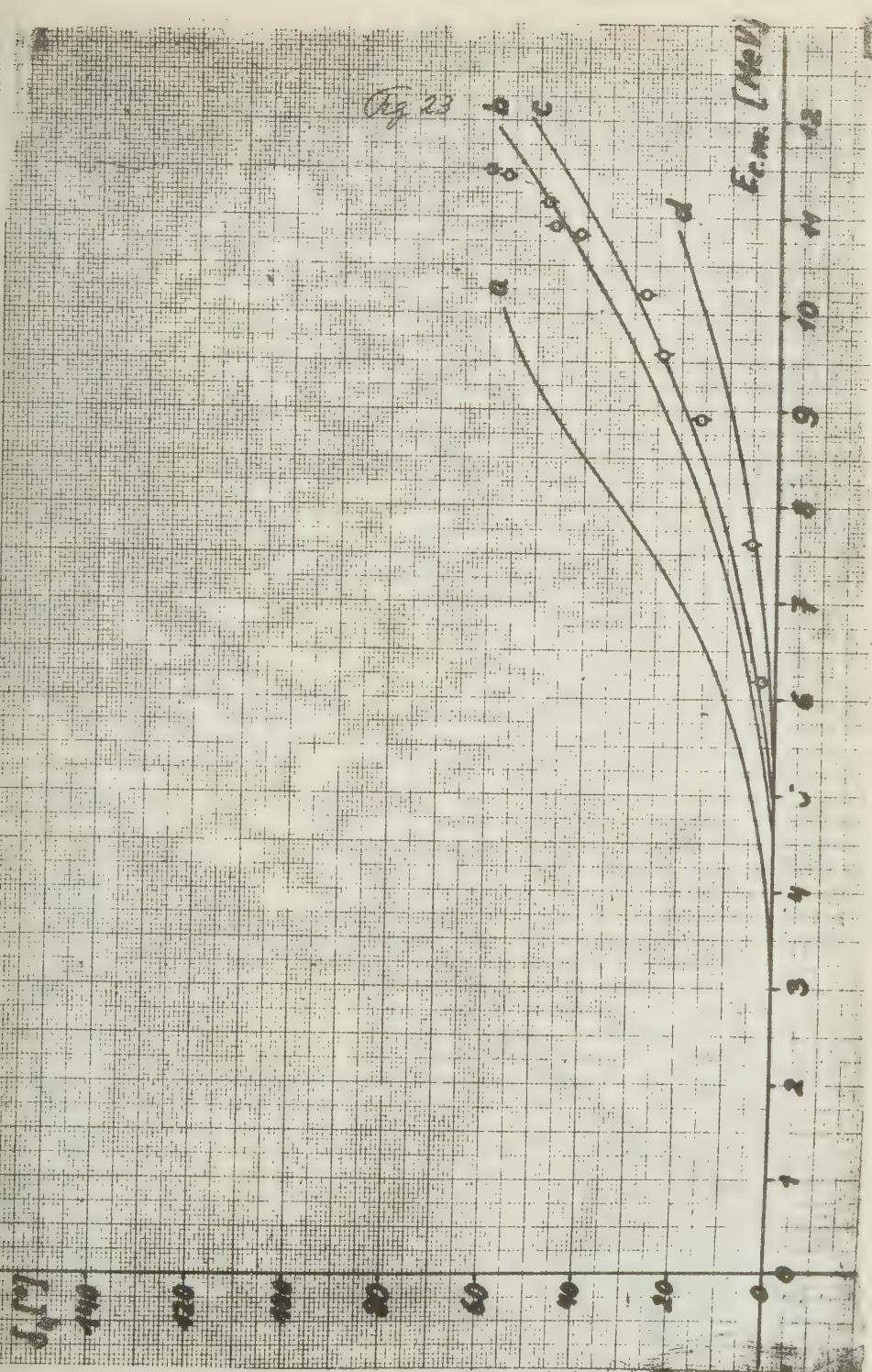
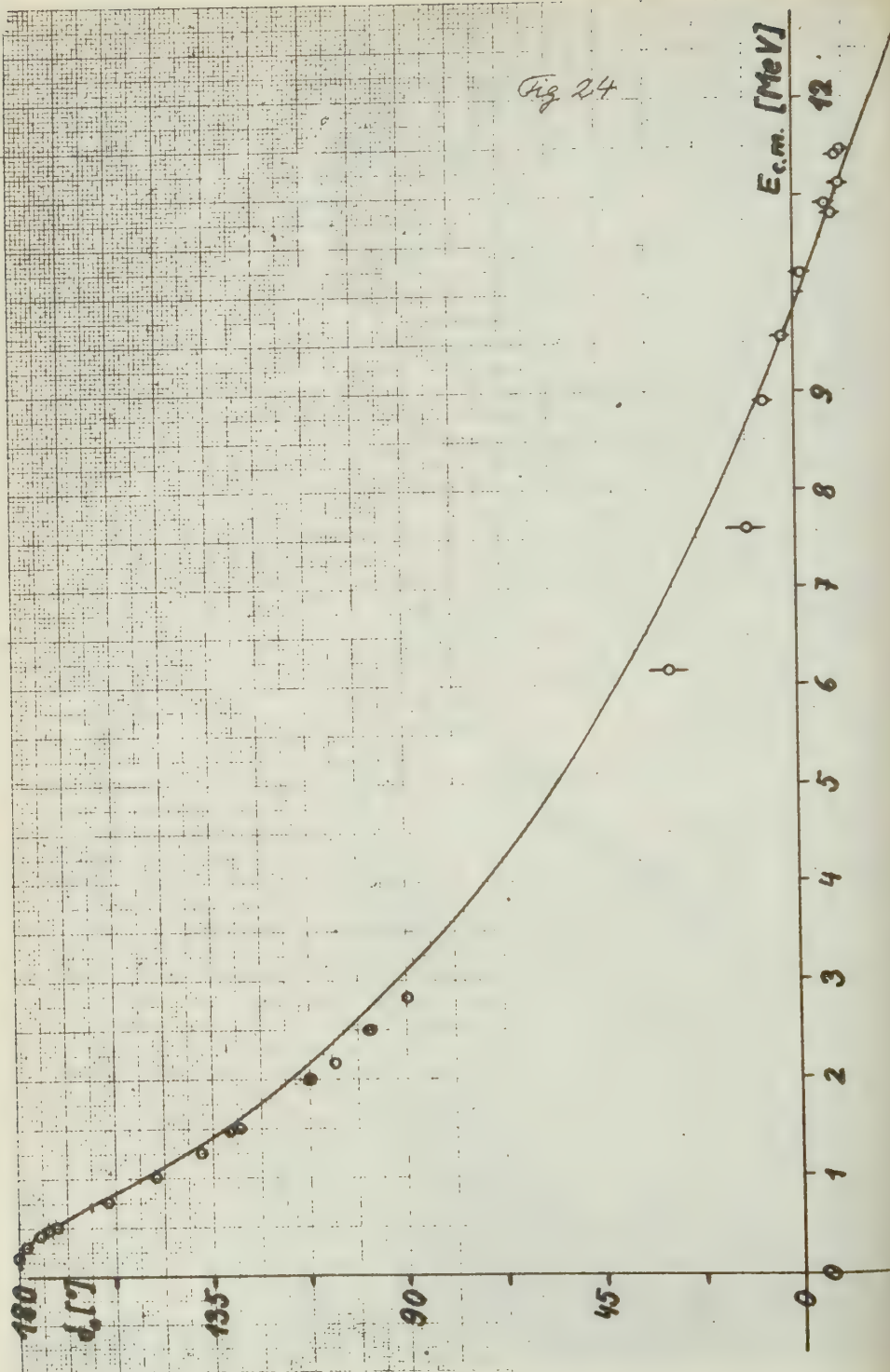


Fig 24



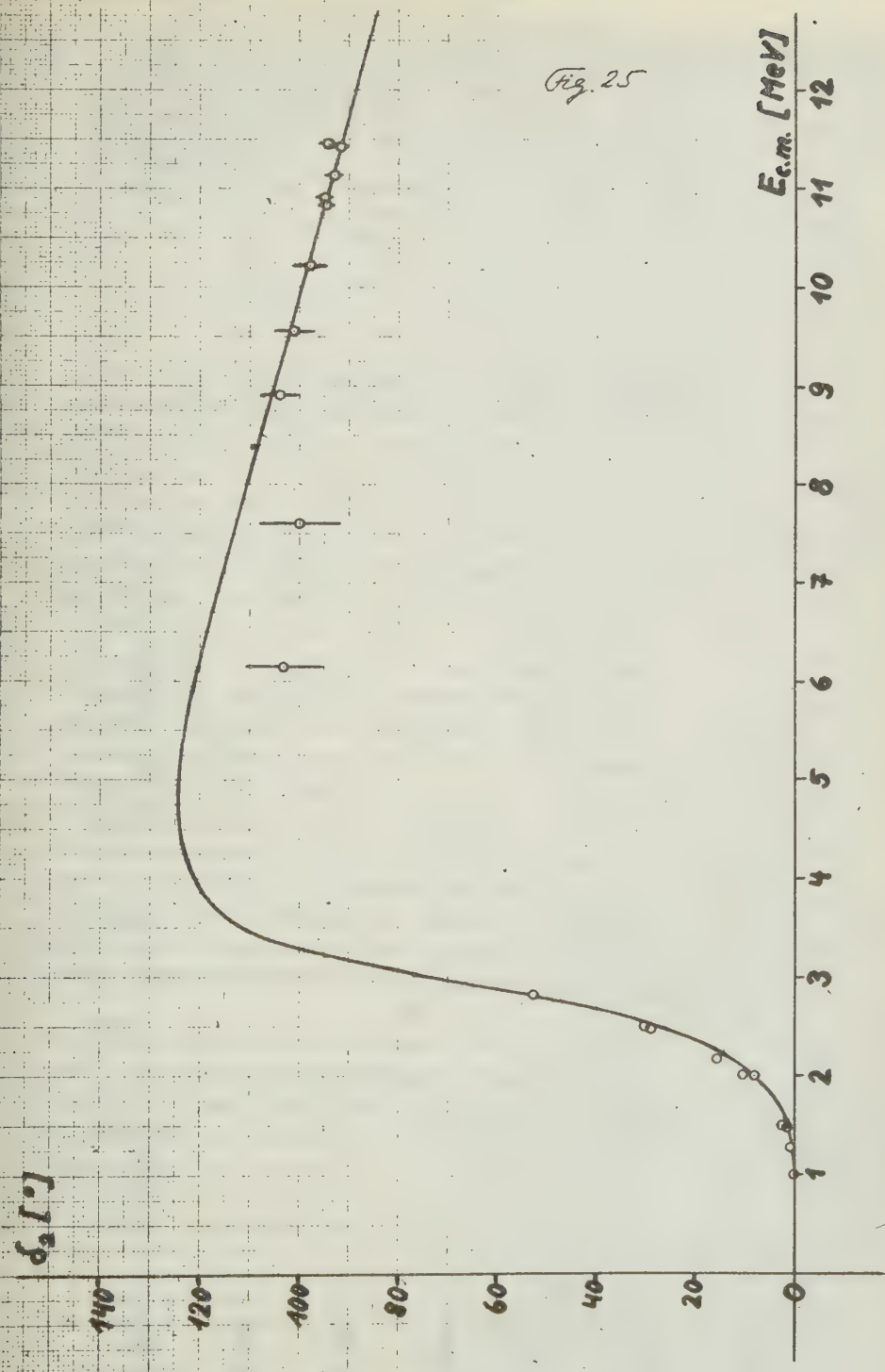
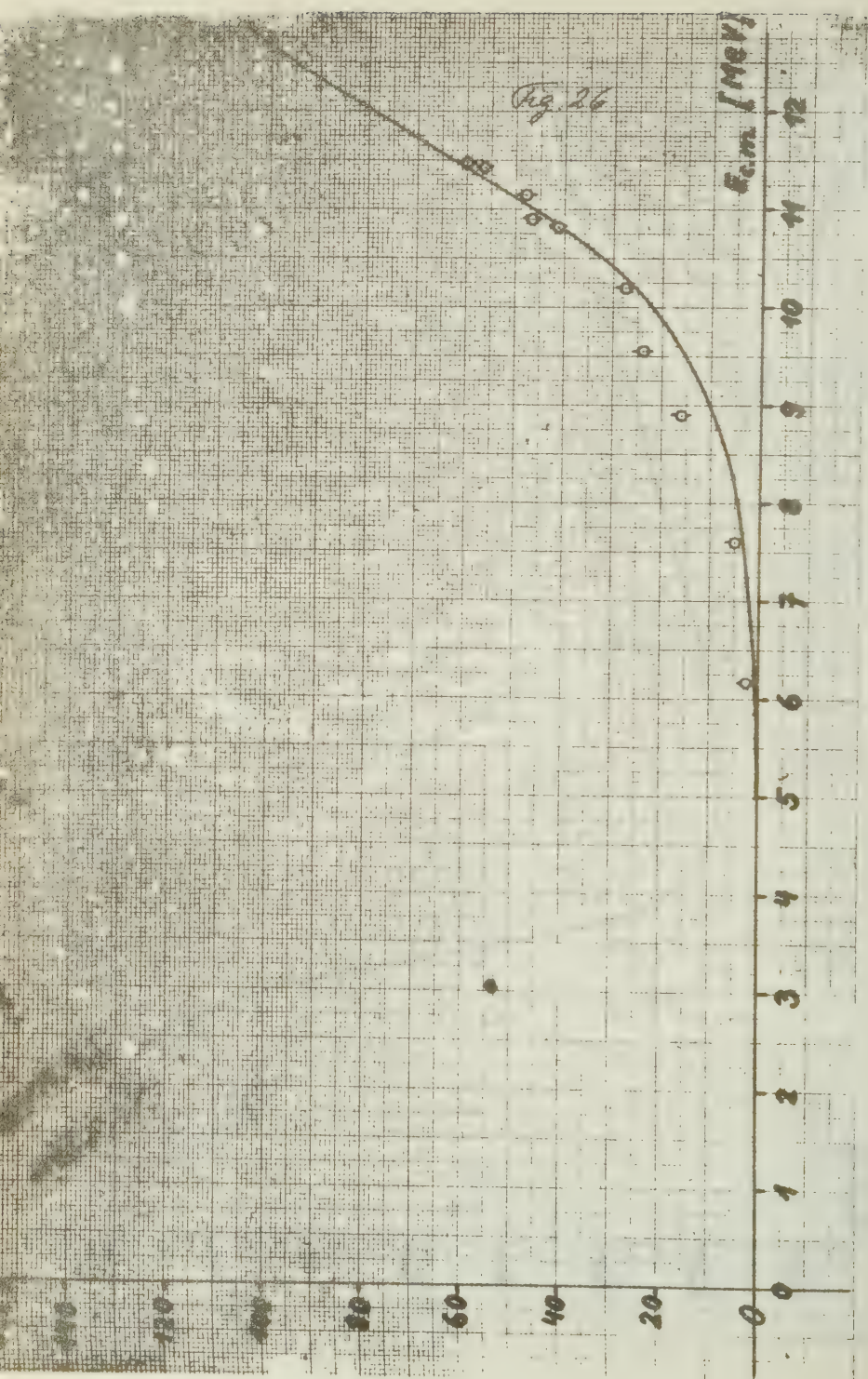


Fig. 26



Lebenslauf

Am 25. April 1928 wurde ich als Sohn des Studienrats Walter Wittern und seiner Ehefrau Marianne, geb. Gabler in Hamburg-Altona geboren.

Von 1934 bis 1938 besuchte ich die Grundschule in Hamburg-Grossfottbek, von 1938 bis 1947 das Gymnasium des Christianeums in Hamburg Altona und bestand 1947 die Reifeprüfung.

Von 1947 bis 1950 erlernte ich das Augenoptikerhandwerk und bestand 1950 vor der Handwerkskammer in Hamburg die Gehilfenprüfung. Von 1950 bis 1951 war ich Praktikant in der Firma Zeiss-Opton, Oberkochen (Württ.).

Vom Sommersemester 1951 bis zum Wintersemester 1955/56 studierte ich Physik, und zwar je 3 Semester an den Universitäten in Hamburg und Göttingen und 4 Semester an der Universität München. 1956 bestand ich die Diplomprüfung in Physik.

Nach dem Studium hatte ich zunächst ein Stipendium der Deutschen Forschungsgemeinschaft und bin seit 1. Nov. 1958 wissenschaftlicher Assistent am Institut für theoretische Physik der Universität München.



